8 Movimientos en el plano

OBSERVA Y REFLEXIONA

Observa la fachada inspirada en la obra de Escher. ¿Son iguales las partes blancas y marrones?

Son iguales las blancas y las marrones de cada bloque.

¿Qué figuras o formas distingues?

Parte de cuadrados en la parte de abajo que se van deformando en diferentes figuras geométricas..

Actividades propuestas

1. Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(-3, 5)$ y $B(-1, -4)$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -4) - (-3, 5) = (2, -9)$

b) $A(2, -1)$ y $B(3, 1)$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1) - (2, -1) = (1, 2)$

2. Actividad resuelta

3. Dados los vectores $\overrightarrow{CS}$ = (–1, 6) y $\overrightarrow{PT}$ = (2, 2):

a) Calcula las coordenadas de *C* si *S* (4, –2).

b) Calcula las coordenadas de *T* si P (–1, 4).

a) $\overrightarrow{CS} = S - C \Rightarrow C = S - \overrightarrow{CS} = (4, -2) - (-1, 6) = (5, -8)$

b) $\overrightarrow{PT} = T - P \Rightarrow T = P + \overrightarrow{PT} = (-1, 4) + (2, 2) = (1, 6)$

4. Dado el triángulo cuyos vértices son *A*(–1, 3), *B*(0, –1) y *C*(2, –2), calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CB}$. Comprueba que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1) - (-1, 3) = (1, -4)$

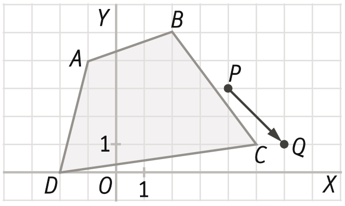
$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -2) - (-1, 3) = (3, -5)$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(1, -4) = (-1, 4)$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (0, -1) - (2, -2) = (-2, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = (2, \ -1) \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (-1, \ 4) + (3, \ -5) = (2, \ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

5. Dibuja en tu cuaderno y calcula las coordenadas del cuadrilátero *A'B'C'D'* que resulta al trasladar el cuadrilátero *ABCD* según el vector $\overrightarrow{PQ}$.

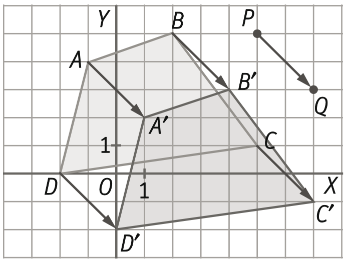


$A' = A + \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 4) + (2,\ -2) = (1,\ 2)$

$B' = A + \overrightarrow{PQ} = (2,\ 5) + (2,\ -2) = (4,\ 3)$

$C' = C + \overrightarrow{PQ} = (5,\ 1) + (2,\ -2) = (7,\ -1)$

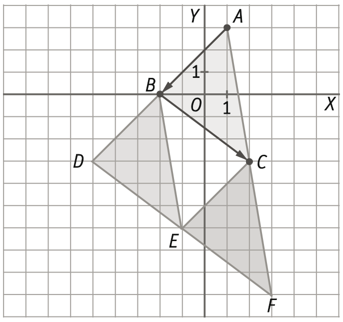
$D' = D + \overrightarrow{PQ} = (-2,\ 0) + (2,\ -2) = (0,\ -2)$



6. Mediante una traslación, el punto *A*(–1, 2) se transforma en *A'*(6, 8). ¿Cuál es el vector de traslación?

El vector de traslación será $\overrightarrow{AA'} = A' - A = (6,\ 8) - (-1,\ 2) = (7,\ 6)$.

7. Dado el triángulo *A*(1, 3) *B*(–2, 0) y *C*(2, –3), aplicarle las traslaciones sucesivas de vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$. ¿A qué única traslación equivale?



Mediante la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$, el triángulo se transforma en el de vértices:

B(−2, 0) *D*(–5, −3) y *E*(−1, –6)

Mediante la traslación de vector $\overrightarrow{BC}$, este nuevo triángulo *BDE* se transforma en el de vértices:

C(2, −3) *E*(–1, −6) y *F*(3, –9)

El producto de estas dos traslaciones equivale a la traslación de vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

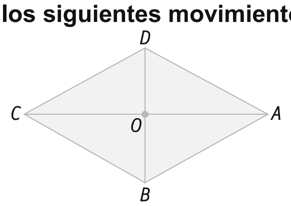
8. Actividad resuelta

9. Dibuja en tu cuaderno el rombo *ABCD* de la figura y aplícale los siguientes movimientos:

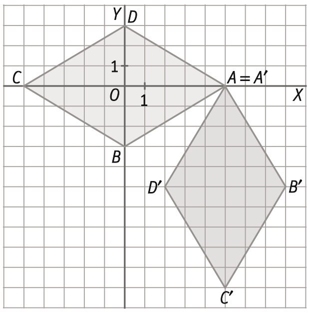
a) Un giro de centro *A* y amplitud 90°.

b) Un giro de centro *O* y amplitud 90°.

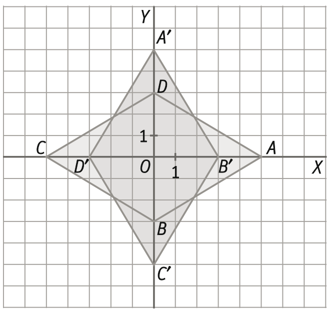
c) Un giro de centro *D* y amplitud –90°.



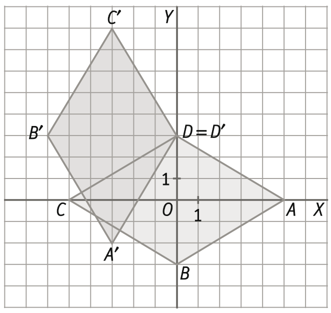
a) Giro de centro A y amplitud 90º.



b) Giro de centro *O* y amplitud 90º.

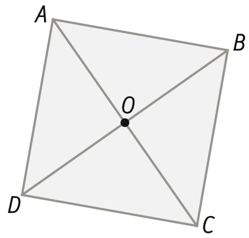


c) Giro de centro *D* y amplitud −90º.



10. Actividad resuelta

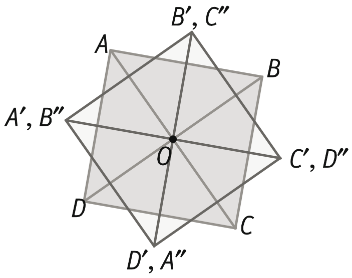
11. Se consideran los giros G_1 de centro *O* y amplitud 45º, G_2 de centro *O* y amplitud 90º y G_3 de centro *A* y amplitud 90º. Copia el cuadrado *ABCD*:



a) Primero el giro G_1 y, al resultado, el giro G_2. ¿A qué equivale este movimiento?

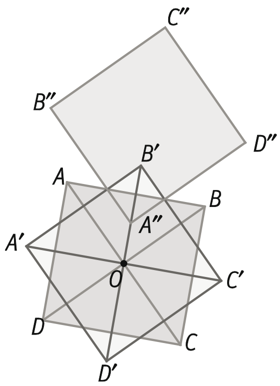
b) Primero el giro G_1 y, al resultado, el giro G_3.

a) G_1 de centro *O* y amplitud 45º y G_2 de centro *O* y amplitud 90º.

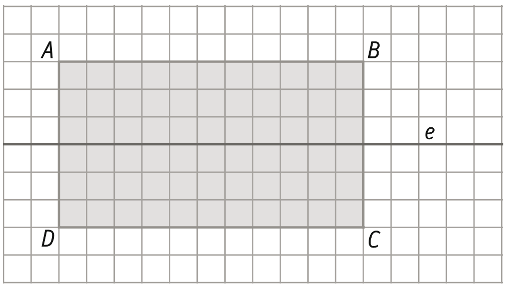


El movimiento equivale a un giro de centro *O* y amplitud 135º.

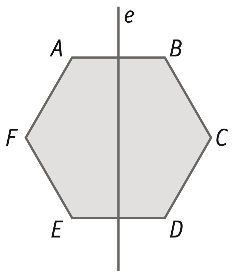
b) G_1 de centro *O* y amplitud 45º y G_3 de centro *A* y amplitud 90º.



12. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Construye con regla y compás el eje de simetría que transforma *A* en *D* y *B* en *C*, respectivamente.



13. Dibuja un hexágono regular y construye con regla y compás un eje de simetría de sus vértices.



14. Calcula las coordenadas del triángulo homólogo al de vértices *A*(–2, 3); *B*(5, 0) y *C*(0, –3) al aplicarle:

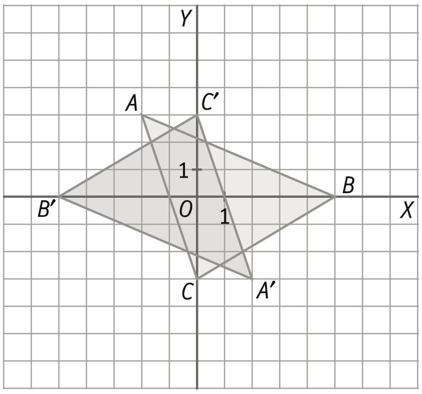
a) Una simetría respecto del origen de coordenadas.

b) Una simetría respecto del eje *X*.

c) Una simetría respecto del eje *Y*.

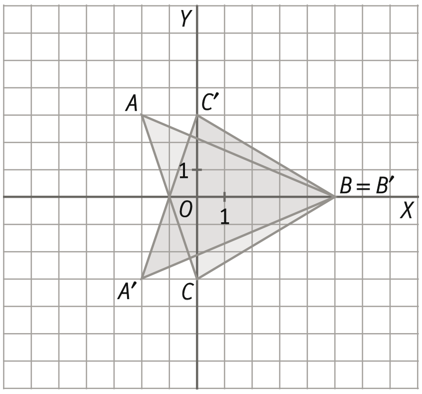
a) Una simetría respecto de *O*.

A'(2, −3); *B'*(-5, 0) y *C'*(0, 3)



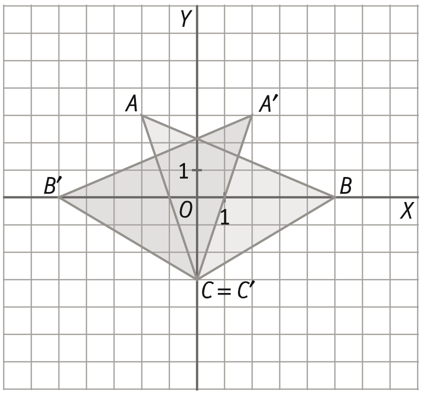
b) Una simetría respecto del eje *X*.

A'(–2, –3); *B'*(5, 0) y *C'*(0, 3)



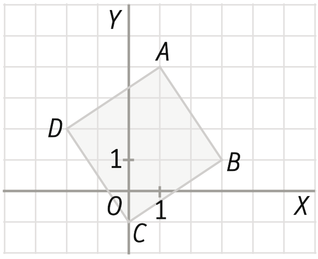
c) Una simetría respecto del eje *Y*.

A'(2, 3); *B'*(-5, 0) y *C'*(0, –3)



15. Actividad resuelta

16. Se consideran las simetrías S_1 de centro el origen de coordenadas y S_2 cuyo eje es el eje de abscisas. Halla las coordenadas del homólogo del cuadrilátero de vértices $A(2, 3)$; $B(-3, 2)$; $C(0, -4)$ y $D(4, -1)$ al aplicarle el producto formado por las simetrías S_1 y S_2.

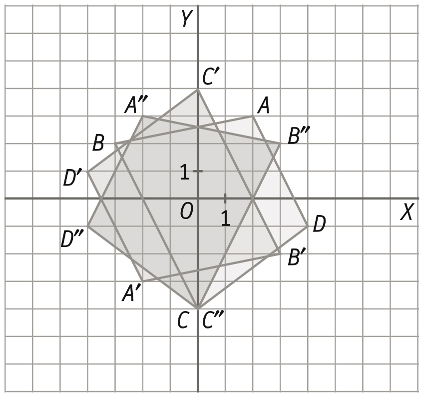


Al aplicar S_1 se obtiene el cuadrilátero de vértices:

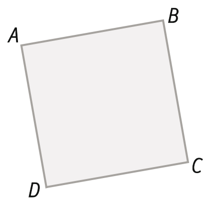
$A'(-2, -3)$; $B'(3, -2)$; $C'(0, 4)$ y $D'(-4, 1)$

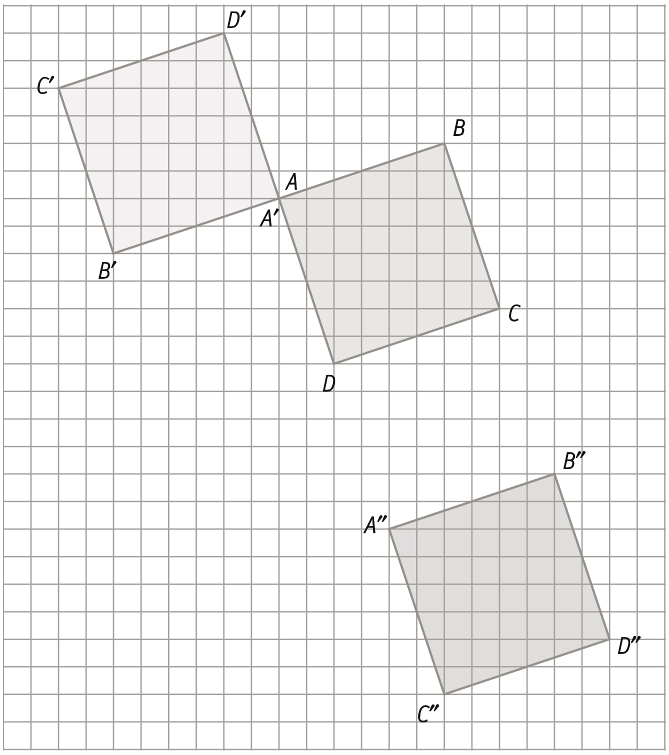
Al aplicar S_2 al cuadrilátero $A'B'C'D'$ se obtiene el cuadrilátero de vértices:

$A''(-2, 3)$; $B''(3, 2)$; $C''(0, -4)$ y $D''(-4, -1)$



17. Al cuadrado *ABCD* de la figura se le aplica primero una simetría de centro *A* y después, al resultado, otra simetría de centro *D*. ¿Se obtendría la misma figura si se aplicaran las dos simetrías en orden inverso?

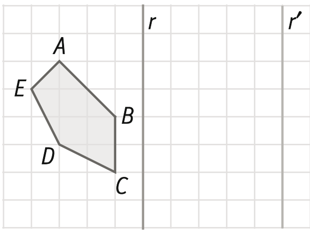




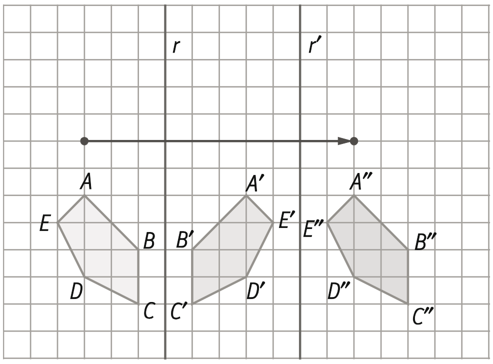
Al aplicar las dos simetrías en sentido inverso, no se obtendría el mismo resultado.

El producto de dos simetrías no es, en general, conmutativo.

18. Al polígono *ABCDE* de la figura se le aplica una simetría axial de eje *r*, y después, otra simetría axial de eje *r'* paralelo a *r*. La distancia entre *r* y *r'* es 5 unidades. Halla el movimiento equivalente al producto de simetrías considerado.



El movimiento equivalente al producto de las dos simetrías es la traslación de vector $\vec{u}$ de módulo 10 unidades, dirección perpendicular a los ejes y sentido que va de *r* a *r'*.



19. ¿En qué se transforma una recta perpendicular al eje de simetría por una simetría axial?

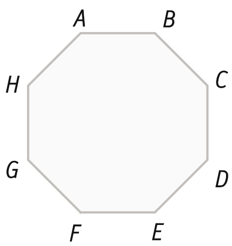
Se transforma en la misma recta.

20. Actividad interactiva

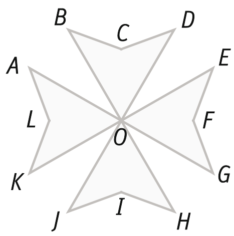
21. Actividad resuelta

22. Indica, si es que existen, los ejes de simetría y el centro de simetría de las siguientes figuras:

a)



b)



a) Cualquier recta que pase por dos vértices opuestos es un eje de simetría. También lo es cualquier recta que pase por los puntos medios de dos lados opuestos.

El centro del polígono es el centro de simetría.

b) Ejemplos de ejes de simetría son las rectas *CI* y la recta que une los puntos medios de *AB* y *GH*.

El punto *O* es el centro de simetría de la figura.

23. Indica, si es que existen, los ejes y el centro de simetría de:

a) Un rectángulo

b) Un pentágono regular

c) Un decágono regular

d) Un eneágono regular

a) Los ejes de simetría son las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos. Excepto los cuadrados, los rectángulos no tienen centro de simetría.

b) Los ejes de simetría son las rectas que unen el punto medio de un lado y su vértice opuesto. No tiene centro de simetría.

c) Cualquier recta que pase por dos vértices opuestos es un eje de simetría. También lo es cualquier recta que pase por los puntos medios de dos lados opuestos. El centro del polígono es el centro de simetría.

d) Los ejes de simetría son las rectas que unen el punto medio de un lado y su vértice opuesto. No tiene centro de simetría.

24. Dados los puntos *A*(–2, 3), *B*(4, 2) y *C*(1, –4) indica cuáles son los movimientos inversos de los siguientes:

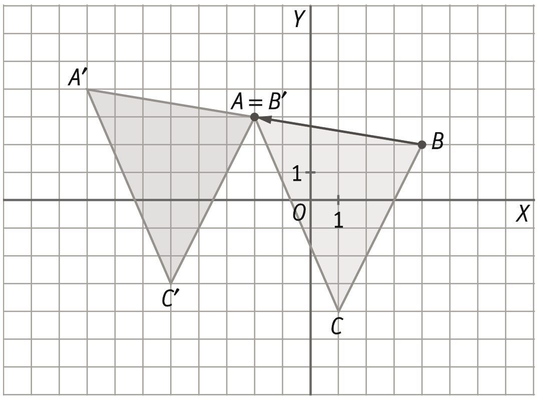
a) Una traslación que transforma el punto *A* en el *B*.

b) Un giro de centro *A* y amplitud −35º.

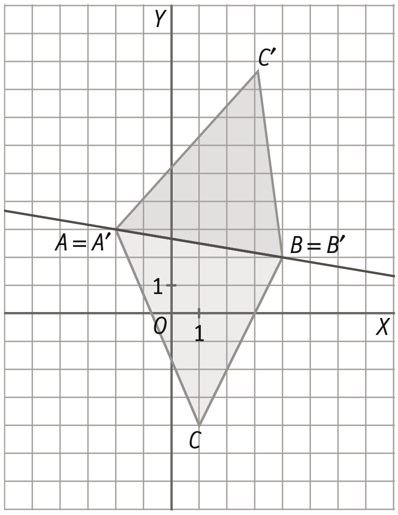
c) Una simetría axial de eje la recta *AB*.

d) Una simetría central de centro *C*.

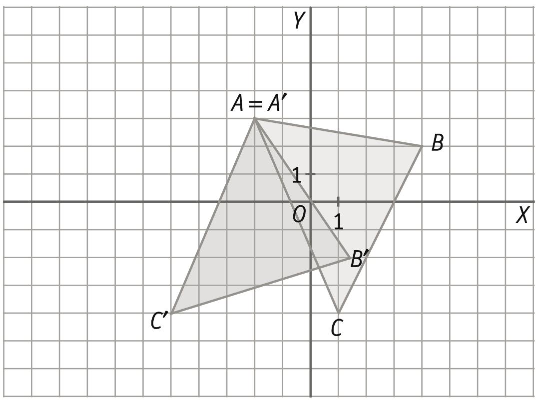
a) Una traslación de vector $\overline{BA}$.



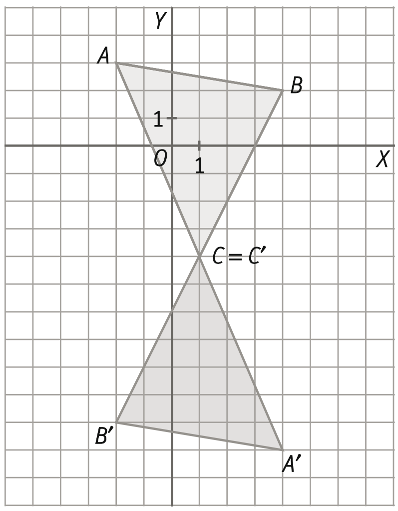
c) Una simetría axial del eje la recta *AB*.



b) Un giro de centro *A* y amplitud −35º.



d) Una simetría central de centro *C*.



25. Dados los puntos *A*(2, –5), *B*(3, –2) y *C*(1, 6) indica cuáles son los movimientos inversos de los siguientes:

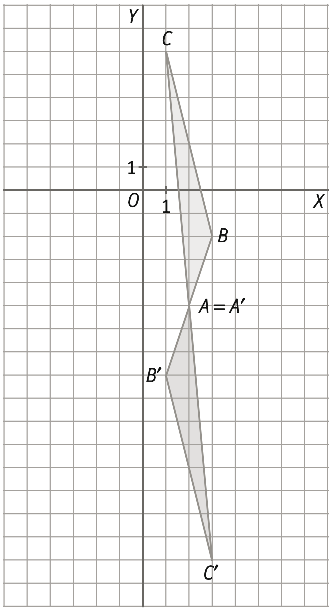
a) Una simetría central de centro *A*.

b) Una traslación que transforme *C* en *B*.

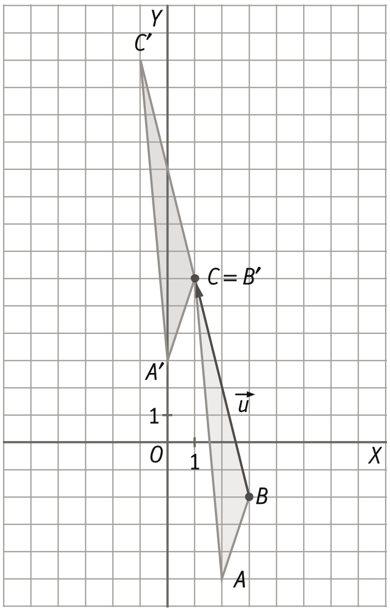
c) Un giro de amplitud 190º y centro *C*.

d) Un giro de amplitud 60º y centro *B*.

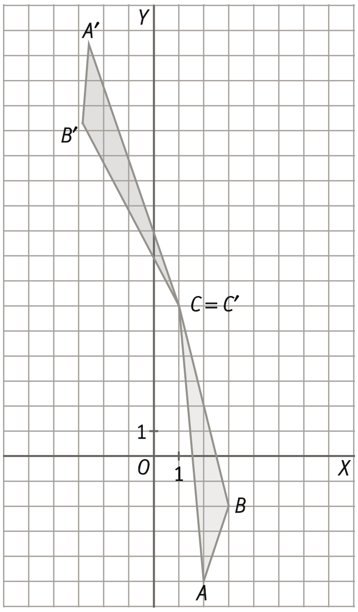
a) Una simetría central de centro *A*.



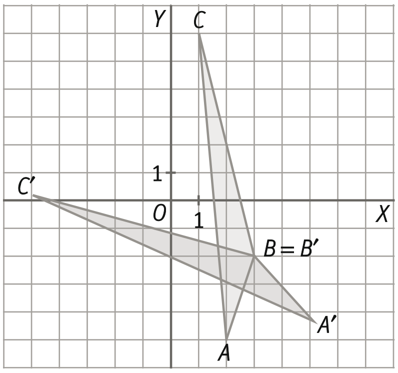
b) Una traslación de vector $\overrightarrow{BC}$, que transforma *B* en *C*.



c) Un giro de centro *C* y amplitud 170º.



d) Un giro de centro *B* y amplitud −60º.



26. Actividad resuelta

27. Dados los puntos *A*(2, –4), *B*(–2, 3) y *C*(–2, 4), calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ **b)** $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ **c)** $-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=(-4,\ 7)+(0,\ -1)=(-4,\ 6)$

b) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=(-12,\ 21)+(-8,\ 16)=(-20,\ 37)$

c) $-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}=(0,\ -2)+(-16,\ 32)=(-16,\ 30)$

28. Dados *A*(–5, 4), *B'*(–1, 2) y $\vec{u}=(0,3)$:

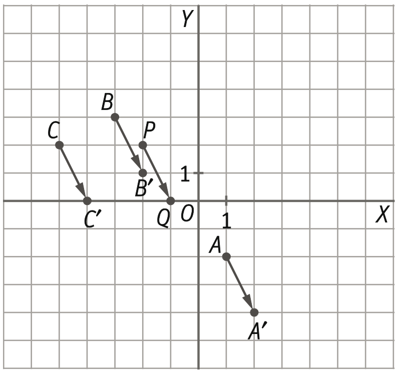
a) Calcula las coordenadas del punto *A'* tal que $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$

b) Calcula las coordenadas del punto *B* tal que $\overrightarrow{BB'}=\vec{u}$

a) $A'(x,\ y)\Rightarrow\overrightarrow{AA'}=(x+5,\ y-4)=(0,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\y=7\end{cases}\Rightarrow A'(-5,\ 7)$

b) $B(x,\ y)\Rightarrow\overrightarrow{BB'}=(-1-x,\ 2-y)=(0,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(-1,\ -1)$

29. Dados los puntos *A*(1, –2), *B*(–3, 3), *C*(–5, 2), *P*(–2, 2) y *Q*(–1, 0), calcula las coordenadas de los puntos *A'*, *B'* y *C'* tales que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{PQ}$. Represéntalo gráficamente.



A'(2, –4)

B'(–2, 1)

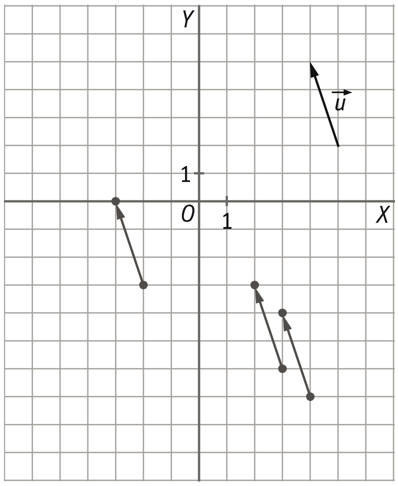
C'(–4, 0)

30. Dados los puntos *A'*(2, –3), *B'*(3, –4), *C'*(–3, 0), y el vector $\vec{u}=(-1,3)$, calcula las coordenadas de los puntos *A*, *B* y *C* tales que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\vec{u}$. Represéntalo.

$A(x,\ y)\Rightarrow\overrightarrow{AA'}=(2-x,\ -3-y)=(-1,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-6\end{cases}\Rightarrow A(3,\ -6)$

$B(x,\ y)\Rightarrow\overrightarrow{BB'}=(3-x,\ -4-y)=(-1,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=-7\end{cases}\Rightarrow B(4,\ -7)$

$C(x,\ y)\Rightarrow\overrightarrow{CC'}=(-3-x,\ 0-y)=(-1,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}\Rightarrow C(-2,\ -3)$



31. Calcula los puntos homólogos en las traslaciones que se indican.

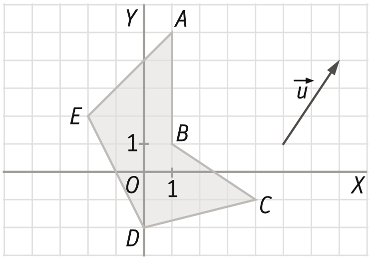
a) Homólogo del punto *P*(–3, 4) en la traslación de vector $\vec{u} = (-3, 2)$.

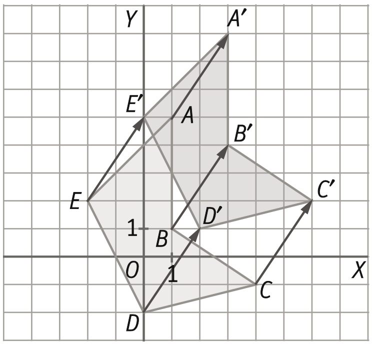
b) Homólogo de *Q*(0, –4) en la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ siendo *A*(–1, 1) y *B*(–3, 5).

a) $P' = P + \vec{u} = (-3, 4) + (-3, 2) = (-6, 6)$

b) $Q' = Q + \overrightarrow{AB} = (0, -4) + (-2, 4) = (-2, 0)$

32. Halla en tu cuaderno, de forma gráfica y numérica, los vértices homólogos del pentágono *ABCDE* en la traslación de vector $\vec{u}$.





A(1, 5) ⟹ *A'*(3, 8)

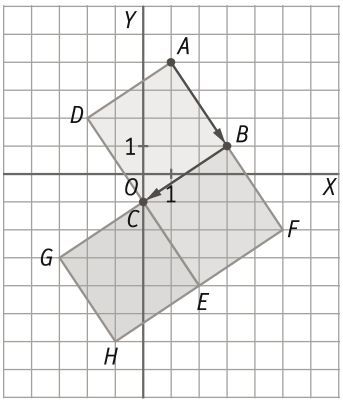
B(1, 1) ⟹ *B'*(3, 4)

C(4, –1) ⟹ *C'*(6, 2)

D(0, –2) ⟹ *D'*(2, 1)

E(–2, 2) ⟹ *E'*(0, 5)

33. Aplica al cuadrado *ABCD* una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ y después, al resultado, una traslación de vector $\overrightarrow{BC}$. ¿Qué ocurre si aplicas primero la traslación de vector $\overrightarrow{BC}$ y después la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$? ¿A qué movimiento equivale el producto de las dos traslaciones anteriores?



Al aplicar al cuadrado *ABCD* la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$, se obtiene el cuadrado *BFEC*.

Al aplicar al cuadrado *BFEC* la traslación de vector $\overrightarrow{BC}$, se obtiene el cuadrado *CEH*G.

Al aplicar primero la traslación de vector $\overrightarrow{BC}$ y después la de vector $\overrightarrow{AB}$, se obtiene la misma figura *CEHG*.

El producto de las dos traslaciones equivale a una única traslación de vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

34. ¿Cuál es el vector de una traslación que transforma el punto *A*(2, –4) en el punto *A'*(7, 7)?

Es el vector $\overrightarrow{AA'} = A' - A = (5, \quad 11)$.

35. Un círculo de centro *O*(2, –2) y radio 5 se traslada según el vector $\vec{u} = (3,\ 4)$.

a) ¿Cuáles son el nuevo centro y el nuevo radio?

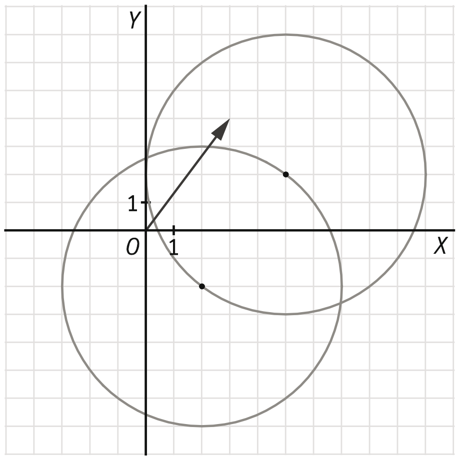
b) Dibuja el círculo trasladado.

a) El nuevo centro será:

$O + \vec{u} = (2,\ \ -2) + (3,\ \ 4) = (5,\ \ 2)$

El radio permanece invariante *r* = 5.

b)



36. Si un punto permanece invariante por una traslación de vector $\vec{u} = (a,\ b)$, ¿cuáles pueden ser los valores de *a* y *b*?

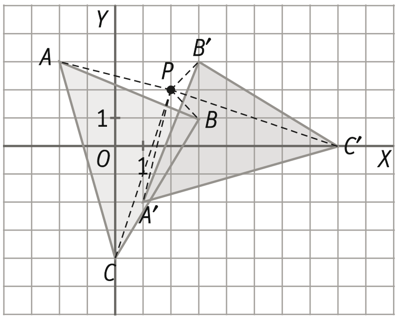
El vector $\vec{u}$ solo puede ser el $\vec{u} = (0,\ \ 0) \Rightarrow a = b = 0$.

37. Dado el triángulo de vértices *A*(–2, 3), *B*(3, 1) y *C*(0, –4), halla gráficamente:

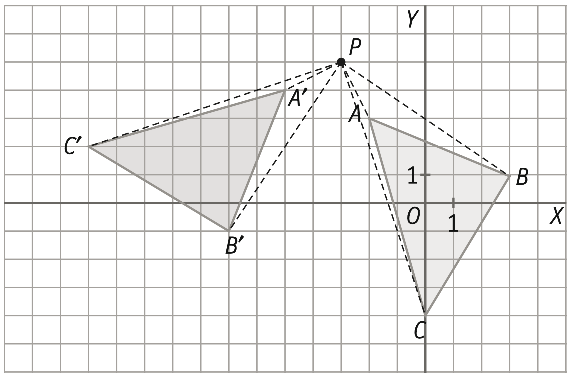
a) El triángulo homólogo al aplicar un giro de centro el punto *P*(2, 2) y amplitud 90º.

b) El triángulo homólogo al aplicar un giro de centro el punto *P*(–3, 5) y amplitud –90º.

a) Giro de centro el punto *P*(2, 2) y amplitud 90º.



b) Giro de centro el punto *P*(–3, 5) y amplitud –90º.



38. A una figura se le aplica un giro de centro *O* y amplitud 200º, y a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230º. Explica cuál es el giro resultante.

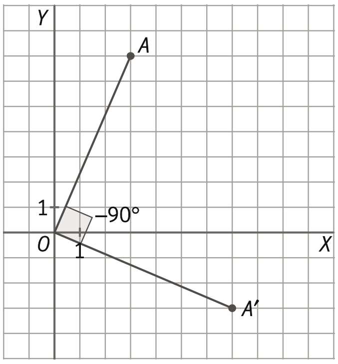
El giro de centro *O* y amplitud 200º + 230º = 430º = 360º + 70º.

Es decir, se realiza un giro de centro *O* y amplitud 70º.

39. ¿Qué figura es la homóloga de un círculo si se le aplica un giro de centro el centro del círculo y amplitud un ángulo α cualquiera?

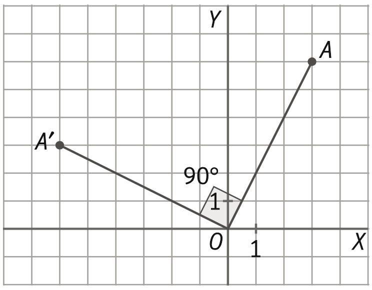
La figura homóloga es la misma figura.

40. Halla las coordenadas del homólogo de *A*(3, 7) mediante un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud –90º.



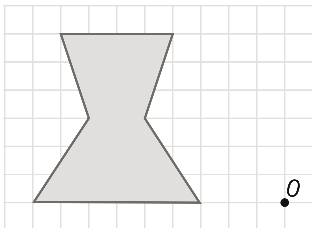
A(3, 7) $\Rightarrow$ *A'* (7, -3)

41. Los puntos *A*(3, 6) y *A'*(–6, 3) son homólogos en un giro de centro el origen de coordenadas. ¿Cuál es la amplitud del giro?

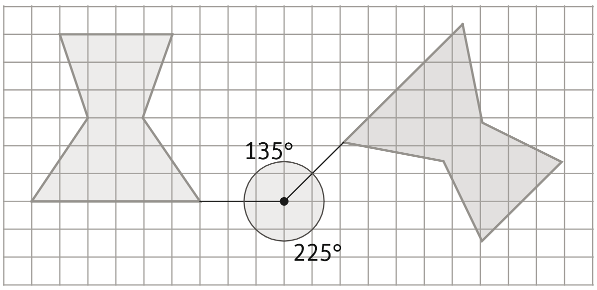


La amplitud del giro es de 90º.

42. Copia en tu cuaderno la siguiente figura y aplícale un giro de centro y *O* amplitud 225º y, al resultado, otro giro de centro *O* y amplitud 135º. ¿Hay algún movimiento único que transforme la figura inicial en la final directamente?



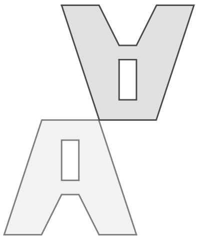
El resultado del producto de los dos giros es un giro con el mismo centro *O* y amplitud 225º + 135º = 360º. Es decir, se trata del movimiento "identidad" que transforma cada punto es sí mismo.



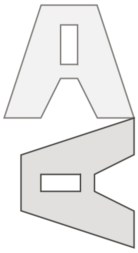
43. Actividad resuelta

44. Las figuras moradas se han obtenido tras aplicar un giro a las figuras rosas. Copia las figuras en tu cuaderno y halla el centro y la amplitud del giro.

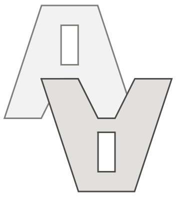
a)



b)

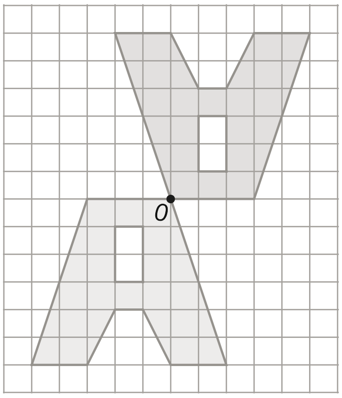


c)

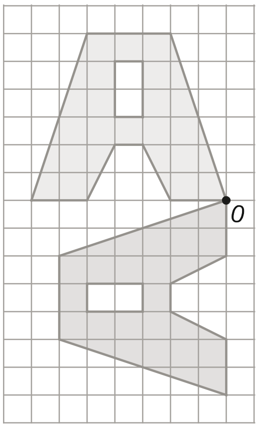


Como se sabe que las figuras son homólogas mediante un giro, éste deberá ser la intersección de las mediatrices de extremos dos pares de puntos homólogos.

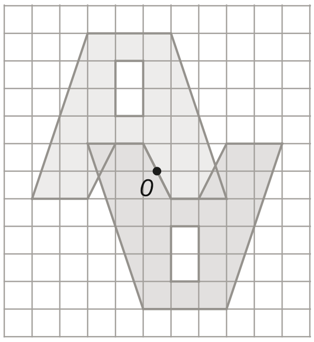
a) Giro de centro *O* y amplitud 180º.



b) Giro de centro O y amplitud 90º.

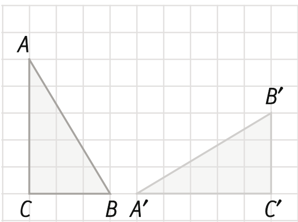


c) Giro de centro O y amplitud 180º.

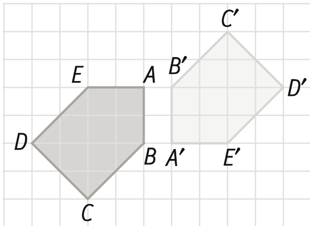


45. Las figuras amarillas se han obtenido aplicando un giro a las azules. Halla en tu cuaderno el centro de giro e indica, de forma aproximada, cuál es la amplitud de cada giro.

a)

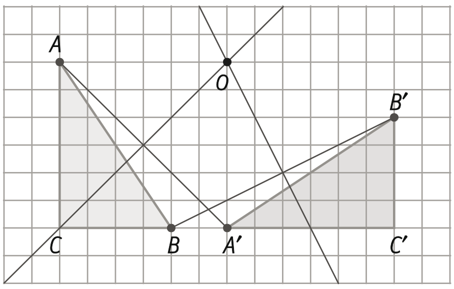


b)

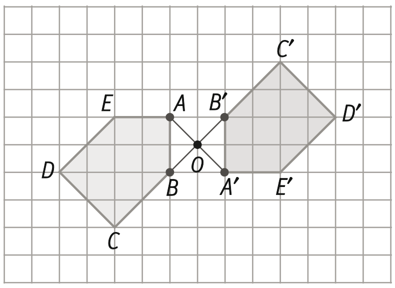


Como se sabe que las figuras son homólogas mediante un giro, éste deberá ser la intersección de las mediatrices de extremos dos pares de puntos homólogos. Por ejemplo, las mediatrices de los segmentos *AA'* y *BB'*.

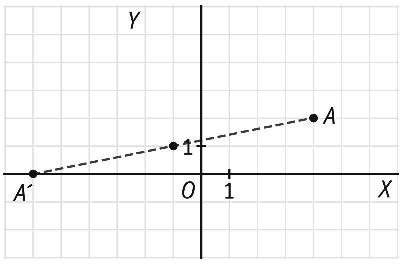
a) Giro de centro *O* y amplitud 90º.



b) Giro de centro *O* y amplitud 180º.



46. Halla las coordenadas del simétrico del punto *A*(4, 2) por una simetría de centro *O*(–1, 1). Haz un dibujo para obtener la respuesta.



El simétrico de *A* es *A'*(−6, 0).

47. Halla el simétrico del segmento que tiene por extremos los puntos *A*(–3, 4) y *B*(5, 2), en los siguientes casos:

a) Una simetría axial respecto del eje de ordenadas.

b) Una simetría axial respecto del eje de abscisas.

c) Una simetría central de centro el origen de coordenadas.

a) *A'*(3, 4) y *B'*(−5, 2)

b) *A'*(−3, −4) y *B'*(5, −2)

c) *A'*(3, −4) y *B'*(−5, −2)

48. Dados los puntos *A*(3, 1), *B*(–1, 3) y *C*(–4, 0):

a) Halla las coordenadas de los vértices del triángulo *A'B'C'* homólogo del *ABC* mediante la simetría axial respecto del eje de abscisas.

b) Halla las coordenadas de los vértices del triángulo *A"B"C"* homólogo del *A'B'C'* mediante la simetría mediante la simetría central de centro el origen de coordenadas.

a) *A'* (3, −1), *B'*(−1, −3) y *C'*(−4, 0)

b) *A''* (−3, 1), *B''*(1, 3) y *C''*(4, 0)

49. Dados los puntos *A*(1, 1), *B*(–2, 2), *C*(–3, –3) y *D*(4, –4):

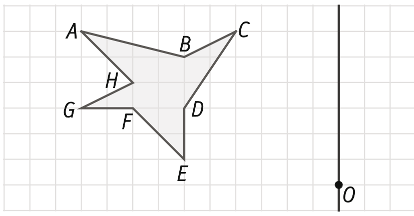
a) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *A'B'C'D'* homólogo del *ABCD* mediante la simetría axial respecto del eje de ordenadas.

b) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *A'B'C'D'* homólogo del *ABCD* mediante la simetría central de centro el origen de coordenadas.

a) *A'*(−1, 1), *B'*(2, 2), *C'*(3, –3) y *D'*(−4, –4)

b) *A'*(−1, −1), *B'*(2, −2), *C'*(3, 3) y *D'*(−4, 4)

50. Aplica al polígono de la figura los siguientes movimientos.

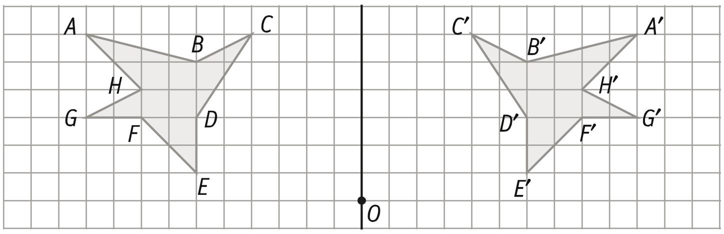


a) Una simetría axial de eje la recta *r*.

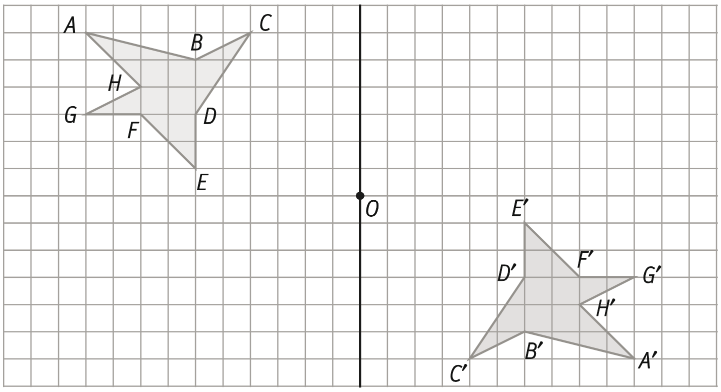
b) Una simetría central de centro *O*.

c) Una simetría axial de eje *r* y una simetría central de centro *O* sucesivamente.

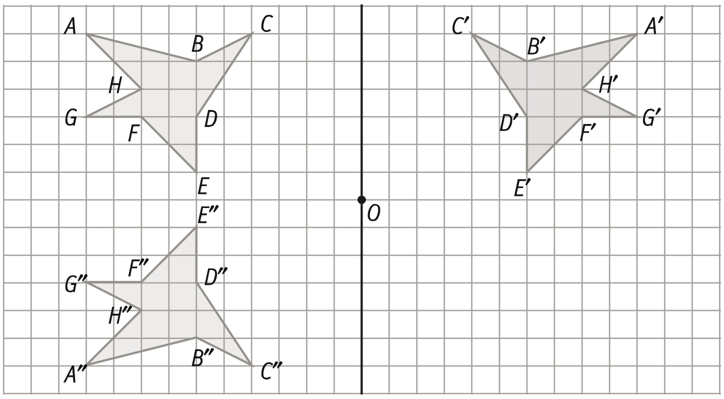
a) Una simetría axial de eje la recta *r*.



b) Una simetría central de centro *O*.



c) Una simetría axial de eje *r* y una simetría central de centro *O* sucesivamente.

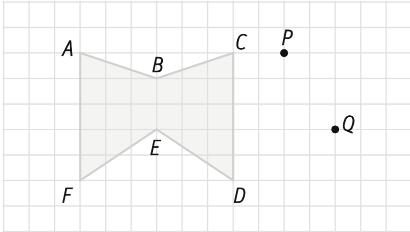


51. **Copia en tu cuaderno y aplica al polígono de la figura los siguientes movimientos.**

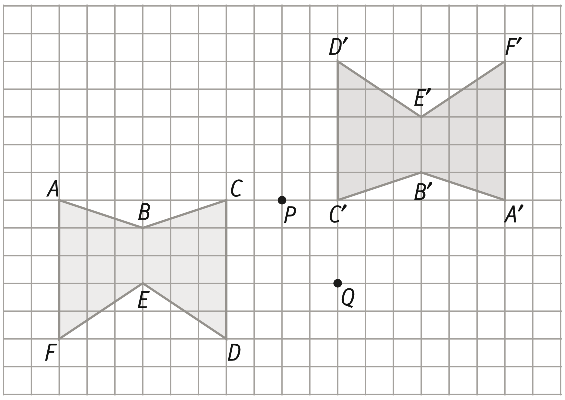
a) Una simetría central de centro *P*.

b) Una simetría central de centro *Q*.

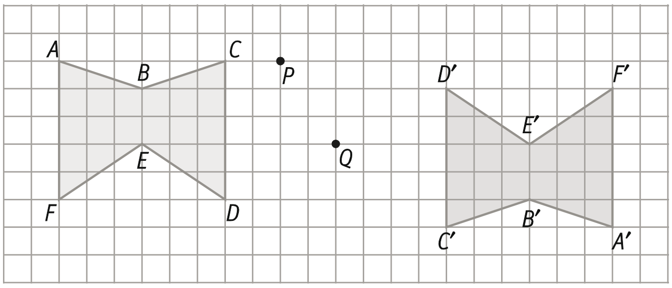
c) Una simetría central de centro *P* y una simetría central de centro *Q* sucesivamente.



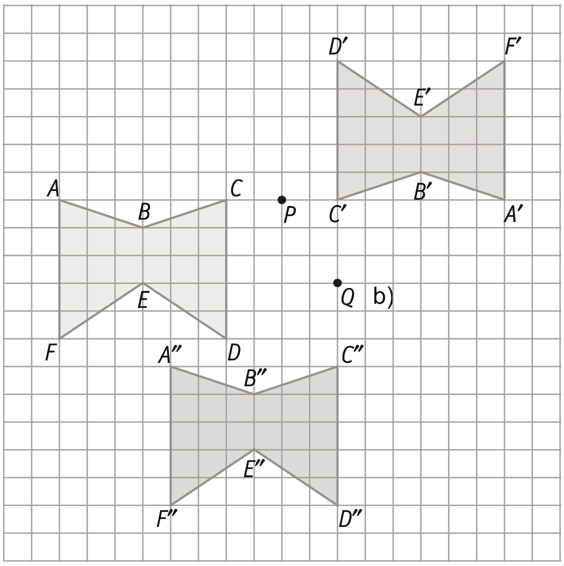
a)



b)

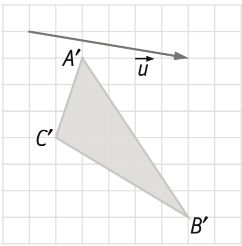


c)

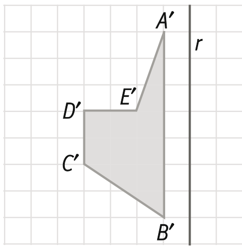


52. Las siguientes figuras se han obtenido como resultado de aplicar a otras figuras iniciales los movimientos que se indican. Halla en tu cuaderno la figura inicial en cada caso.

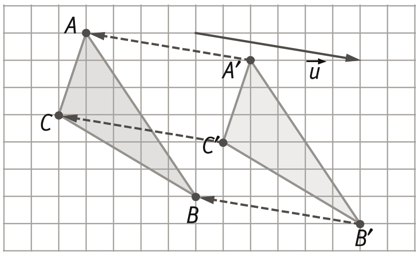
a)



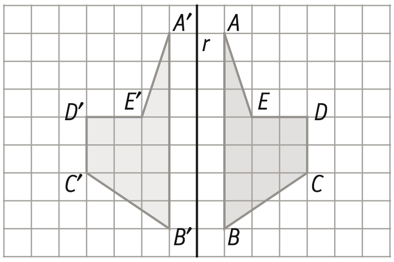
b)



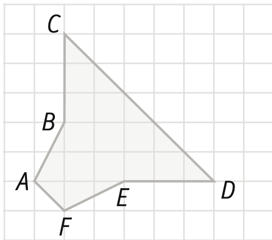
a) Traslación de vector $-\vec{u}$.



b) Simetría axial de eje *r*.



53. Copia la figura en tu cuaderno y aplícale, de forma sucesiva, los siguientes movimientos:



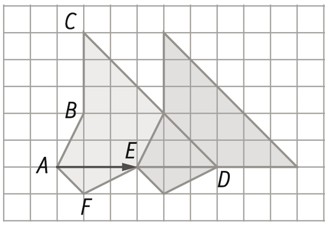
a) Una traslación de vector $\overrightarrow{AE}$.

b) Una simetría de eje *ED*.

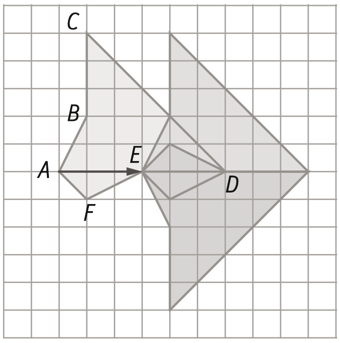
c) Una traslación de vector $\overrightarrow{EA}$.

d) ¿A qué único movimiento equivale el producto de estos tres movimientos?

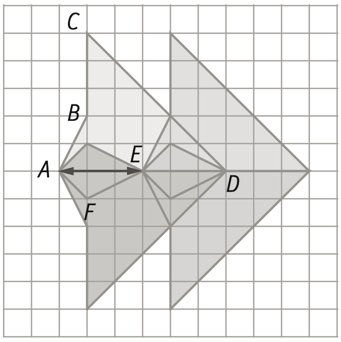
a) Una traslación de vector $\overrightarrow{AE}$.



b) Una simetría de eje *ED*.

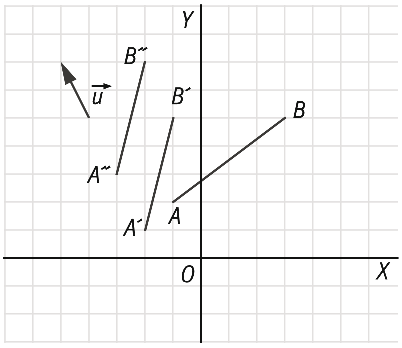


c) Una traslación de vector $\overrightarrow{EA}$.

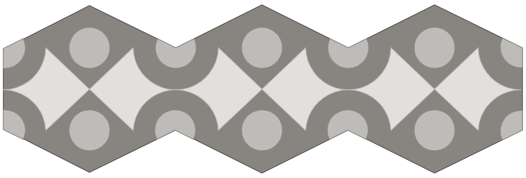


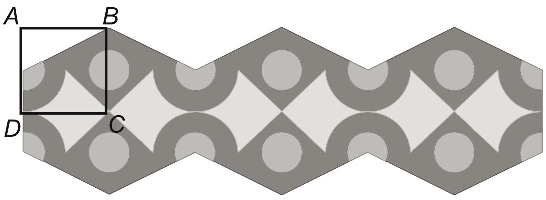
d) El producto de los tres movimientos es equivalente a una simetría respecto del eje *AE*.

54. Aplica al segmento de extremos *A*(–1, 2) y *B*(3, 4) un giro de centro *O*(0, 0) y amplitud 45º y, a su resultado, una traslación de vector $\vec{u} = (-1, 2)$.



55. Identifica qué movimientos se han aplicado para obtener este friso.

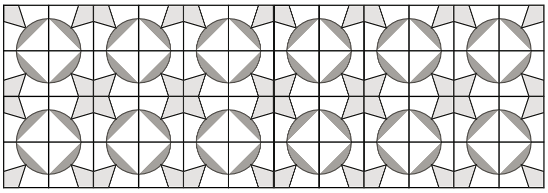




El motivo mínimo es el rectángulo *ABCD*.

Si se realiza una simetría respecto la recta *DC* y, al resultado total, otra simetría respecto *BC* se obtiene la figura que, repitiéndola, da el friso considerado.

56. Identifica qué movimientos intervienen en este mosaico.



La cuadrícula superior izquierda puede ser considerada como motivo mínimo.

Si se realiza una simetría respecto su lado inferior y, al resultado total, otra simetría respecto su lado derecho se obtiene la figura que, repitiéndola, hacia la derecha y hacia abajo, da el friso considerado.

57. Indica qué rectas quedan invariantes en:

a) Una traslación de vector no nulo

b) Un giro de 180º

c) Una simetría central

d) Una simetría axial

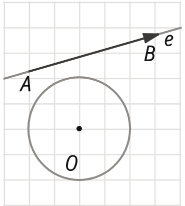
a) Las rectas paralelas al vector.

b) Las rectas que pasan por el centro de giro.

c) Las rectas que pasan por el centro de simetría.

d) El eje de simetría.

58. **Dibuja en tu cuaderno la figura homóloga de la circunferencia de la figura mediante:**



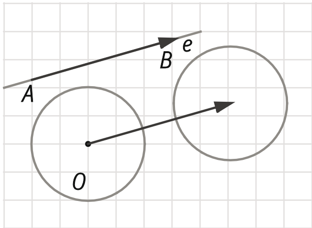
a) **La traslación de vector $\overrightarrow{AB}$**

b) **El giro de centro *O* y amplitud 30º**

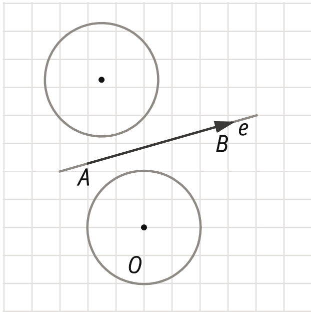
c) **La simetría axial de eje *e***

d) **La simetría central de centro *O***

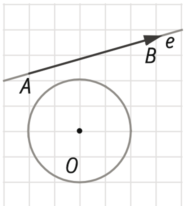
a) La traslación de vector $\overrightarrow{AB}$.



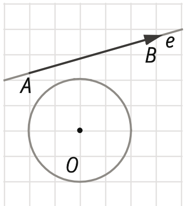
c) La simetría axial de eje *e*.



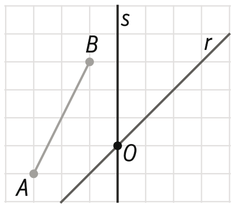
b) El giro de centro *O* y amplitud 30º.



d) La simetría central de centro *O*.



59. **Copia en tu cuaderno y aplícale al segmento de la figura:**

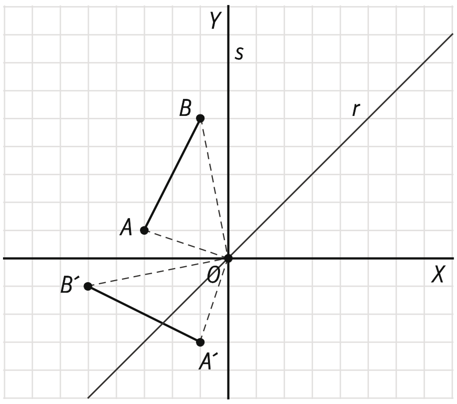


a) **Un giro de centro *O* y amplitud 90º.**

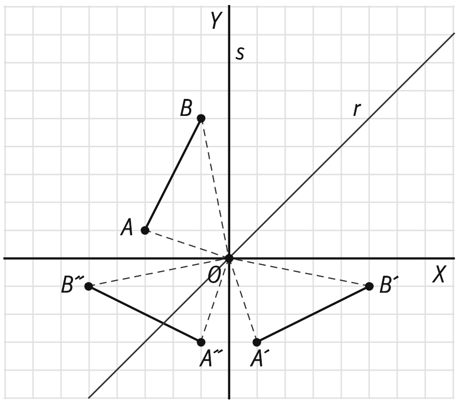
b) **Un producto de simetrías axiales: primero respecto de la recta *r* y después respecto de la recta *s*.**

Comprueba que obtienes el mismo resultado en los dos casos.

a) Giro de centro *O* y amplitud 90º.

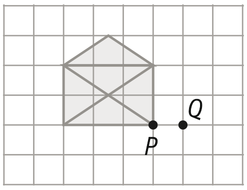


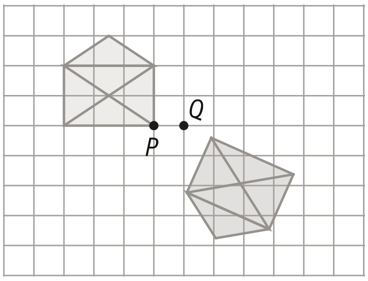
b) Producto de simetrías axiales.



60. Dada la figura, aplica, en tu cuaderno, un giro de centro *P* y amplitud 160º y después, otro giro de centro *Q* y amplitud 200º.

¿A qué único movimiento equivale la composición de los dos movimientos anteriores?

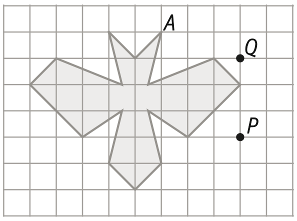




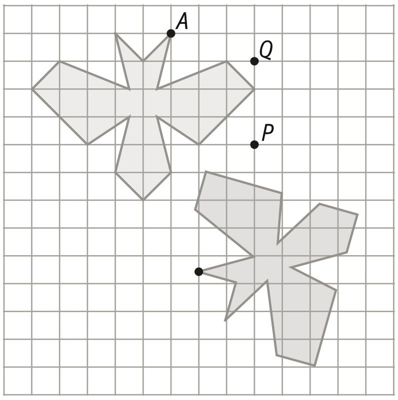
Al aplicar el segundo movimiento, se obtiene la figura inicial.

El producto de movimientos es equivalente al movimiento "identidad" que hace corresponder a cada punto el mismo.

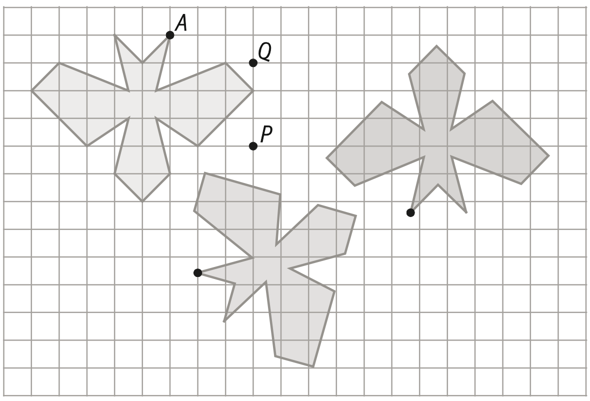
61. Aplica en tu cuaderno un giro de centro *P* y amplitud 120º a la siguiente figura y, después al resultado, otro giro de centro *Q* y amplitud 60º.



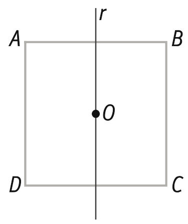
- Giro de centro *P* y amplitud 120º.



- Giro de centro *Q* y amplitud 60º.



62. El centro del cuadrado *ABCD* de la figura es el punto *O*. La recta *r* pasa por *O* y por los puntos medios de los lados *AB* y *DC*. Se consideran los movimientos:



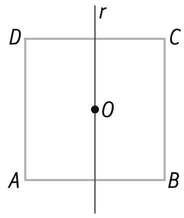
***G*: giro de centro *O* y amplitud 90º**

S*: simetría axial de eje la recta *r

a) Indica en qué puntos se transforman los vértices *A*, *B* y *C* en las siguientes composiciones:

i) *G→G* **ii) *G→S*** **iii) *S→G→G→G***

b) Utilizando solamente *G* y *S*, tantas veces como necesites y en el orden que elijas, escribe el movimiento que corresponde a la siguiente figura de dos formas diferentes.



a)	**i)** A→C	B→D	C→A	D→B
	ii) A→C	B→B	C→A	D→D
	iii) A→A	B→D	C→C	D→B

b) S→G→G y G→G→S

63. Halla, si es que existen, los ejes de simetría y el centro de simetría de las siguientes figuras:

a)

b)

c)

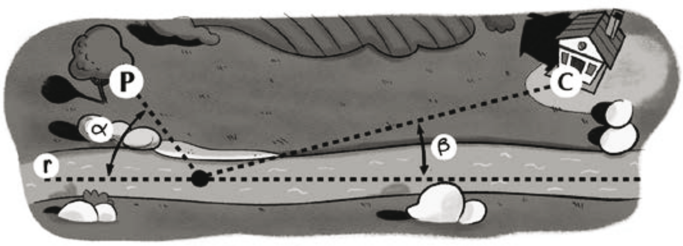
a) Cualquier recta que pase por uno de los vértices de la estrella y por el punto medio del segmento que une los dos vértices opuestos es un eje de simetría. No tiene centro de simetría.

b) Todas las rectas que pasan por el punto medio de dos lados opuestos de la tuerca son ejes de simetría. También lo son las rectas que pasan por dos vértices opuestos. Además, el centro de simetría de la figura es el centro de la tuerca, que coincide con la intersección de dos ejes de simetría cualesquiera.

c) La recta vertical que divide al gato en dos partes iguales es un eje de simetría, dejando un ojo a cada lado, una oreja, etc. El gato no tiene centro de simetría.

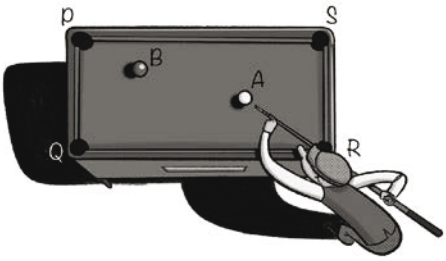
64. Actividad resuelta

65. Se quiere ir del pino *P* a la casa *C* pero pasando por el río *r*. ¿El camino trazado es el trayecto más corto? Justifícalo.

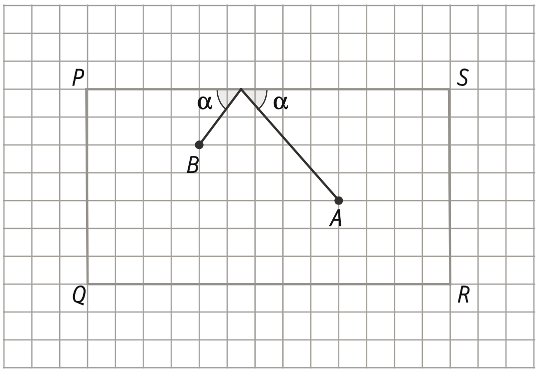


No es el camino más corto. Para que lo fuera sería necesario que los ángulos α y β fueran iguales (y en este caso se observa que α es mayor).

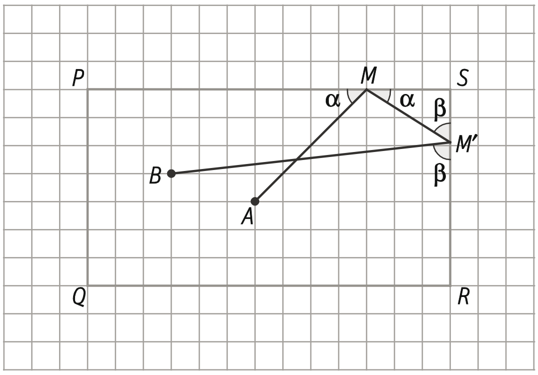
66. ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la bola *A* para chocar con la bola *B* tocando primero en la banda *PS* de la mesa de billar? ¿Y si primero debe tocar en la banda *PS*, después en la banda *SR* y, por último, tocar con la bola *B*? Haz un esquema de la mesa de billar en tu cuaderno y traza las trayectorias de la bola en cada caso.



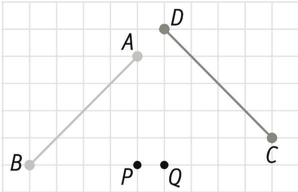
El camino más corto que debe seguir la bola *A* para tocar en la banda *PS* y luego, chocar con *B* es el que forma el mismo ángulo la recta que pasa por *B* y por la banda *PS* que el que forma la recta que pasa por *A* y por la misma banda.



En el segundo caso, será la composición de varios movimientos. Primero, la bola *A* toca a la banda *PS* en un punto *M* tal que forme un ángulo α con la banda. En el siguiente movimiento, la bola *A* toca a la banda *SR* en el punto *M’* de forma que se mantiene el ángulo α entre la trayectoria de la bola y la banda *PS*. Además, el ángulo entre la banda *SR* y el segmento *MM’* es β, que ha de ser el mismo que forme la banda *SR* con el segmento *M’B*. Además, $\beta = 90° - \alpha$.



67. Al segmento *AB* se le ha aplicado un giro de amplitud 270º y se ha obtenido el segmento de extremos *CD*.

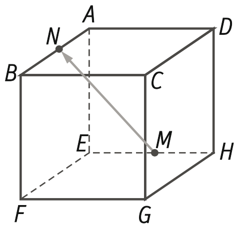


El centro de giro y el homólogo del extremo *A* son:

A. *P* y *C* **B. *Q* y *D*** **C. *Q* y *C*** **D. Ninguna de las anteriores**

La respuesta correcta es la C.

68. En el cubo de la figura, *M* es el punto medio de la arista *EH* y *N* el de la arista *AB*. Se considera la traslación de vector $\overrightarrow{MN}$. El homólogo de *H* es:

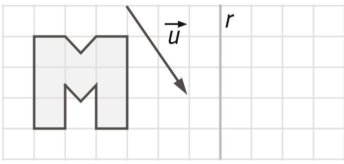


A. *A* **B. *D*** **C. *B*** **D. El centro de la cara *ABCD***

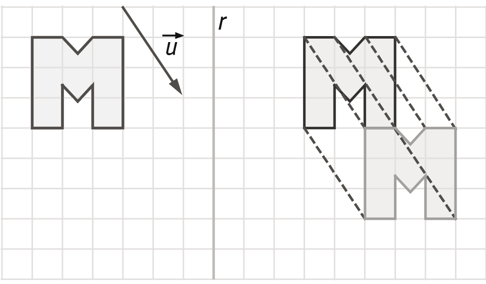
La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

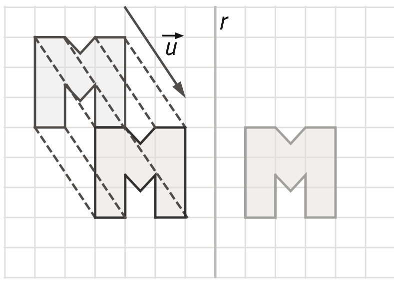
69. Se consideran dos movimientos en el plano: una traslación de vector $\vec{u}$ y una simetría axial de eje la recta *r*. A la siguiente figura se le aplican de forma sucesiva los dos movimientos.



Solución A: Se aplica primero la simetría axial y se obtiene la figura de color morado. Al resultado se le aplica la traslación y se obtiene la figura de color amarillo.



Solución B: Se aplica primero la traslación y se obtiene la figura de color morado. Al resultado se le aplica la simetría axial y se obtiene la figura de color amarillo.



Como ves, se obtiene soluciones diferentes. ¿Cuál es la correcta? ¿O, tal vez, las dos son correctas? ¿Qué se debe indicar claramente en el enunciado de la actividad?

El producto de movimientos no es, en general, conmutativo. El orden de aplicación de los mismos influye en el resultado.

PONTE A PRUEBA

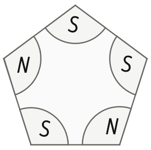
Moviendo figuras

Actividad resuelta

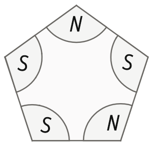
Pentágonos movedizos

Observa las siguientes figuras.

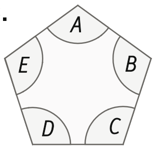
A.



B.

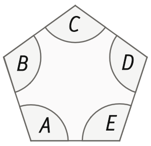


C.

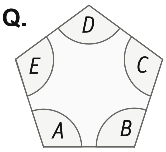


Si a la figura A le corresponde la figura B, ¿cuál de las siguientes figuras P, Q, R o S corresponde a la figura C?

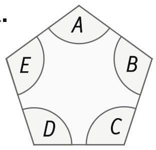
P.



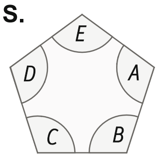
Q.



R.



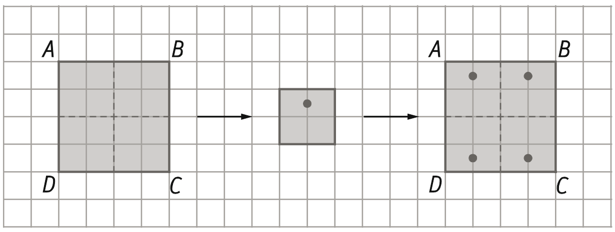
S.



A la figura C le corresponde la figura P.

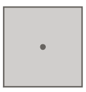
Doblando cuadrados

El cuadrado *ABCD* se ha doblado dos veces por las líneas de puntos indicadas en la figura. Después, se ha hecho un agujero en el punto marcado. Al deshacer los dos dobleces se ha obtenido la figura señalada.

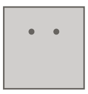


1. **Dibuja las figuras que se obtienen al hacer, en el cuadrado doblado, los siguientes agujeros en los puntos marcados:**

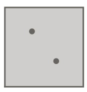
a)



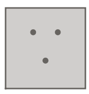
b)



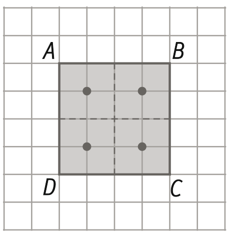
c)



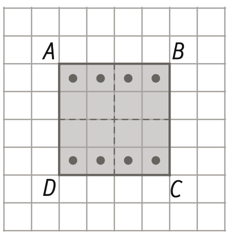
d)



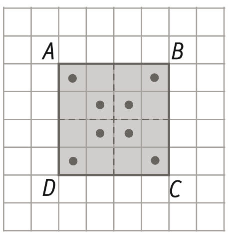
a)



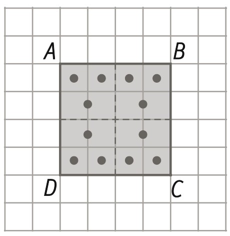
b)



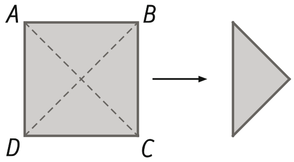
c)



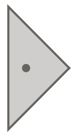
d)



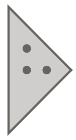
2. **Se hacen, ahora, dos dobleces diferentes como en la figura, indica las figuras que se obtienen al deshacer los dobleces si se han agujereado previamente tal y como se indica en A y B:**



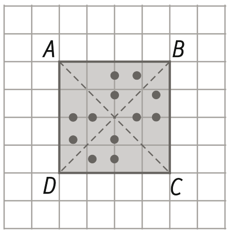
A.



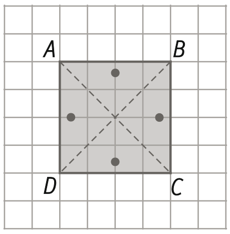
B.



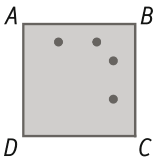
A.

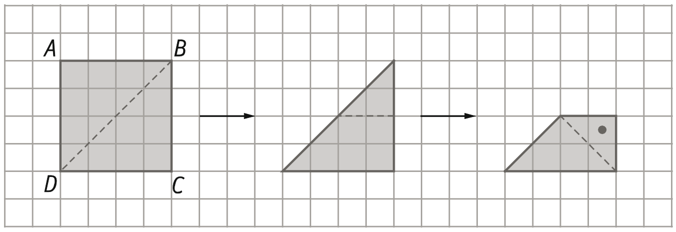


B.



3. **Indica qué dos dobleces se han hecho en el cuadrado inicial para que, habiendo practicado un único agujero en la figura doblada, se haya obtenido la figura final:**





AUTOEVALUACIÓN

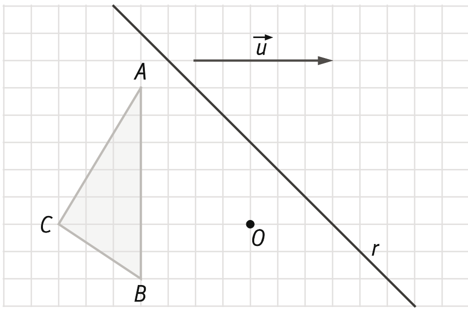
1. **Halla, de forma gráfica, la figura homóloga del triángulo ABC en cada uno de los siguientes casos:**

a) Una traslación de vector $\vec{u}$.

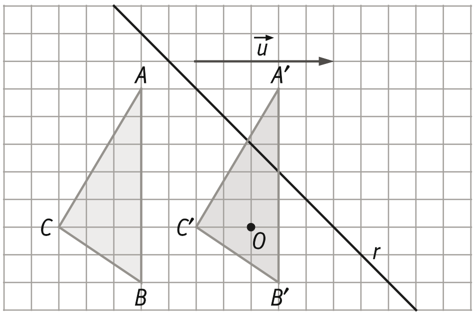
b) Un giro de centro *O* y amplitud 90º.

c) Una simetría axial de eje *r*.

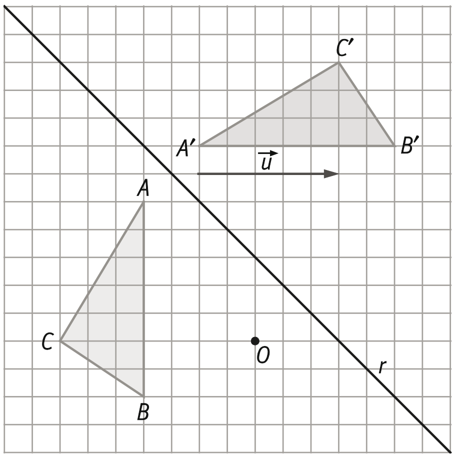
d) Una simetría central de centro *O*.



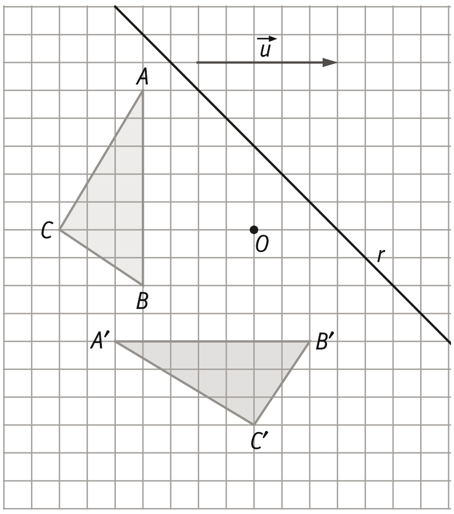
a) Una traslación de vector $\vec{u}$



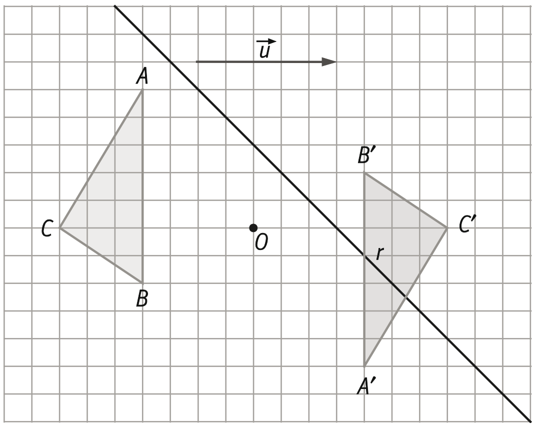
c) Una simetría axial de eje *r*.



b) Un giro de centro *O* y amplitud 90º.



d) Una simetría central de centro *O*.



2. Dado el segmento de extremos *A*(–3, –2) y *B*(0, 5) Halla las coordenadas del segmento *A'B'* homólogo del anterior en:

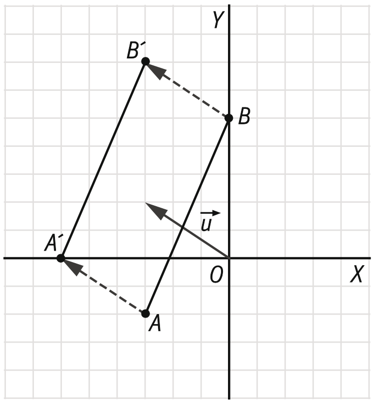
a) Una traslación de vector $\vec{u} = (-3, 2)$.

b) Una simetría respecto del eje *X*.

c) Una simetría respecto del eje *Y*.

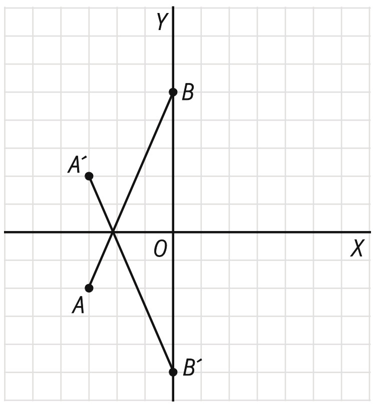
d) Una simetría respecto del origen de coordenadas.

a) Una traslación de vector $\vec{u} = (-3, 2)$.



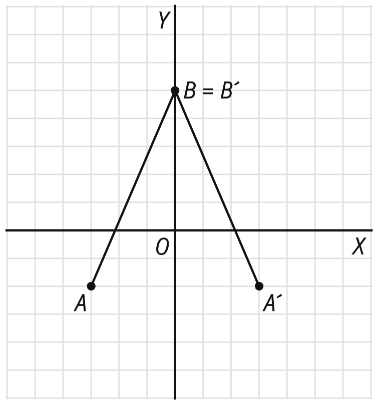
A'(−6, 0), *B*'(−3, 7)

b) Una simetría respecto del eje *X*.



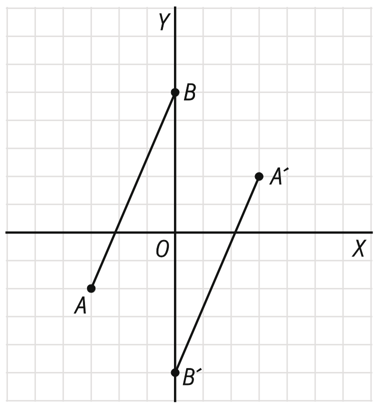
A'(−3, 2), *B*'(0, −5)

c) Una simetría respecto del eje *X*.



A'(−3, −2), *B*'(0, 5)

d) Una simetría respecto del origen de coordenadas.



A'(3, 2), *B*'(0, −5)

3. Dados los puntos *A*(–1, 2); *B*(3, 4) y *C*(–2, –3) halla las coordenadas del punto *D*:

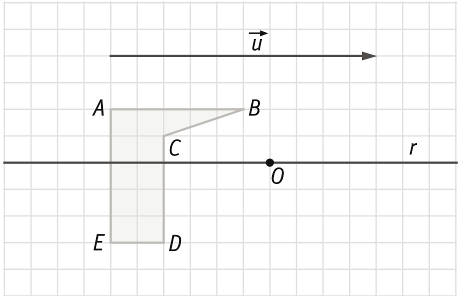
a) Si *D* es el homólogo de *A* en una traslación de vector $\overrightarrow{BC}$.

b) Si al trasladar *D* según el vector $\overrightarrow{AC}$ se obtiene el punto *A*.

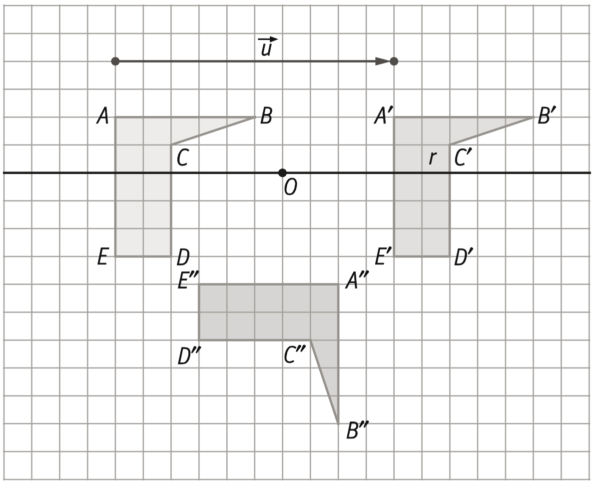
a) $\overrightarrow{BC} = (-5,\ \ -7) \Rightarrow D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,\ \ 2) + (-5,\ \ -7) = (-6,\ \ -5)$

b) $\overrightarrow{AC} = (-1,\ \ -5) \Rightarrow A = D + \overrightarrow{AC} \Rightarrow D = A - \overrightarrow{AC} = (-1,\ \ 2) - (-1,\ \ -5) = (0,\ \ 7)$

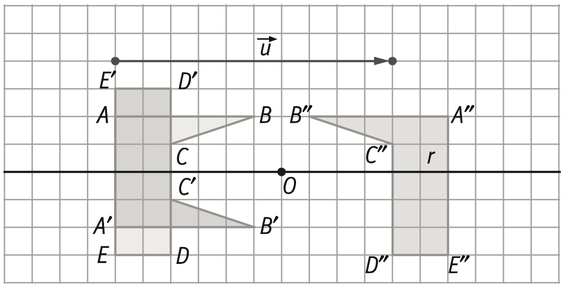
4. **Aplica a la figura los siguientes movimientos sucesivos:**
   a) **Una traslación de vector $\vec{u}$ y un giro de centro *O* y amplitud –90º.**
   b) **Una simetría axial de eje *r* y una simetría central de centro *O*.**



a)



b)



5. **Indica qué ejes de simetría y qué centro de simetría tiene un polígono regular con un número de lados:**

   a) **Par** b) **Impar**

   a) Centro de simetría: punto donde se cortan dos diagonales que pasan por vértices opuestos.

   Ejes de simetría: diagonales que pasan por dos vértices opuestos y rectas que pasan por los puntos medios de dos lados opuestos.

   b) No tiene centro de simetría.

   Ejes de simetría: líneas que pasan por el punto medio de un lado y por el vértice opuesto.