11 Funciones

Analiza y reflexiona

El 24 de octubre de 2014, Eustace, logró completar con éxito un salto similar en Roswell, Nuevo México, pero desde una altura de 41.420 m. El salto al vacío de Eustace, alcanzó una velocidad máxima en el descenso de 1322 km/h.

¿Qué diferencia entre la altura inicial y la velocidad alcanzada hay entre ambos saltos?

Diferencia entre la altura inicial: 41 420 – 39 045 = 2375 m

Diferencia entre la velocidad alcanzada: 1342,8 – 1322 = 20,8 km/h

¿Crees que pese a estas diferencias las funciones que describían el primer salto pudieron valer para el segundo?

Respuesta libre

Calcula y saca conclusiones

La velocidad del sonido es de 300 m/s, exprésala en kilómetros por hora y comparará con las velocidades que alcanzaron Baumgartner y Eustace.

300 m/s = $\frac{300 \cdot 3600}{1000} = 1080$ km/h

1342,8 km/h > 1322 km/h > 1080 km/h

¿Crees que la velocidad que alcanzaron depende de la altura desde la que saltaron?

Respuesta modelo: No, influyen otros factores como la equipación, la presión...

Actividades propuestas

1. **Señala cuáles de estas correspondencias son funciones y, en caso afirmativo, indica la variable dependiente e independiente.**

   a) **A cada número real le corresponde su mitad.**

   b) **A cada ecuación de segundo grado le corresponden sus soluciones.**

   c) **A cada profesor le corresponden sus alumnos.**

   d) **A cada número le corresponden sus divisores.**

   Es una función el enunciado a).

   La variable independiente es el número real y la variable dependiente la mitad.

2. **Razona si hay una correspondencia en los siguientes enunciados y si son o no funciones.**

   a) **¿El color de ojos de una persona depende de la edad de sus padres?**

   b) **¿La factura de la luz está en función de los kilovatios que se han consumido?**

   a) No hay una correspondencia entre el color de los ojos de una persona y la edad de sus padres porque no se puede establecer ninguna relación entre ambas características.

   b) Sí hay una correspondencia porque el precio de la factura de la luz depende de los kilovatios consumidos. Además, es función porque para cada consumo de los kilovatios existe un único importe en la factura de la luz.

3. Observa la tabla y contesta.

Temperatura	–2	–1	0	1	2	3
Sensación térmica	–11	–8	–5	–2	1	4

a) ¿Qué representa la tabla? ¿Es una función?

b) ¿Cuál es el conjunto inicial y el conjunto final?

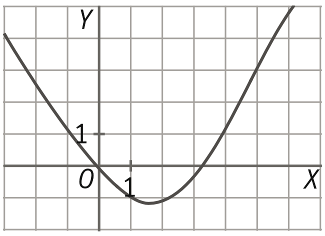
a) La tabla representa como varía la sensación térmica según la temperatura. Es una función porque para cada temperatura se tiene una única sensación térmica.

b) Conjunto inicial: la temperatura. Conjunto final: la sensación térmica.

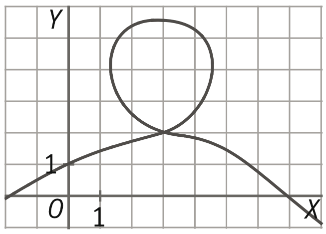
4. Actividad resuelta

5. Indica si las siguientes gráficas representan funciones.

a)

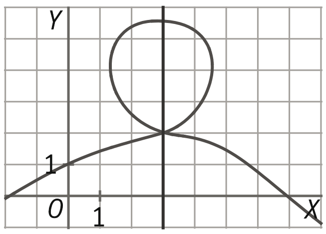


b)



a) Sí es una función. A cada valor del conjunto inicial (valores de *X*) le corresponde un único valor del conjunto final (valores de *Y*).

b) No representa una función porque hay al menos un valor del conjunto inicial (valores de X) al que le corresponde más de un valor del conjunto final (valores de *Y*). Por ejemplo, al valor 3 le corresponde otro valor además del valor 2.



6. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Calcula $f(3)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(-4)$.

b) ¿Existe algún valor de *x* para el que $f(x) = -2$? ¿Y para el que $f(x) = -3$

a) $f(3) = 12$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -3$, $f(-4) = 5$

b) $f(x) = -2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -2 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado completa: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Por tanto, tiene dos valores: $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2}, x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2}$

$f(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -3 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$

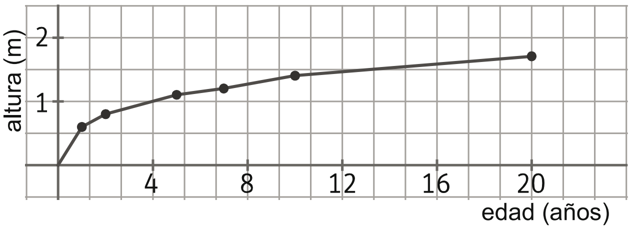
Se resuelve la ecuación de segundo grado incompleta (falta el término independiente):

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

Por tanto tiene dos valores: $x_1 = 0, x_2 = -2$

7. Representa los siguientes datos en unos ejes de coordenadas. ¿Puedes unir los puntos?

Edad (Años)	**1**	**2**	**5**	**7**	**10**	**20**
Altura (m)	**0,6**	**0,8**	**1,1**	**1,2**	**1,4**	**1,7**



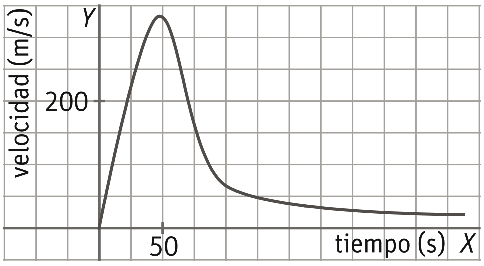
Sí se pueden unir los puntos porque la función puede tomar los valores intermedios.

8. Actividad resuelta

9. La siguiente gráfica representa la velocidad de caída de Baumagartner en función del tiempo.

a) ¿Cuánto tiempo duró el salto?

b) ¿Cuál fue su máxima velocidad? ¿Cuánto tiempo tardó en alcanzarla?



a) El salto duró unos 290 segundos.

b) La velocidad fue de unos 375 m/s y tardó unos 50 segundos en alcanzarla.

10. La dosis de un medicamento es 0,3 g por cada 2 kg de masa del paciente hasta un máximo de 15 g.

a) ¿Cuántos gramos tiene que tomar un niño que tiene una masa de 10 kg? ¿Y de 30 kg? ¿Y una persona de 70 kg?

b) ¿A partir de qué masa se toma la dosis máxima?

c) Realiza una tabla de valores y representa la gráfica de la dosis en función de la masa del paciente. ¿Cuál es el dominio? ¿Y el recorrido?

a) Un niño que tiene una masa de 10 kg debe tomar $0,15 \cdot 10 = 1,5\,\text{g}$.

Si tiene una masa de 30 kg: $0,15 \cdot 30 = 4,5\,\text{g}$

Si tiene una masa de 70 kg: $0,15 \cdot 70 = 10,5\,\text{g}$

b) Se resuelve la siguiente ecuación: $0,15x = 15$

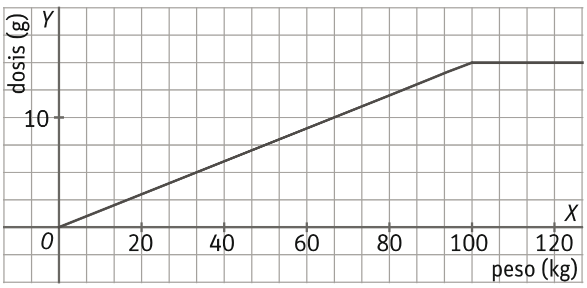
$$0,15x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{0,15} \Rightarrow x = 100$$

La dosis máxima se alcanza a los 100 kg.

c) Tabla de valores:

Peso (kg)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Dosis (g)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3

Peso (kg)	80	90	94	98	100	102	104	106	108	110	112
Dosis (g)	12	13,5	14,1	14,7	15	15	15	15	15	15	15



11. Haz una tabla de valores y representa la función.

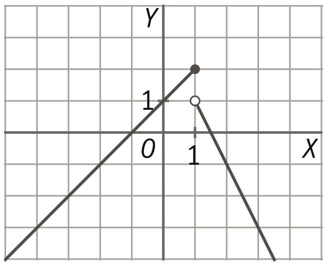
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ -2x+3 & \text{si } 1<x \end{cases}$$

Si $x\le 1$

x	–2	–1	0	1
***f*(*x*)**	–1	0	1	2

Si $x>1$

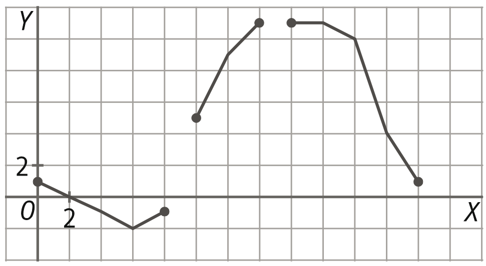
x	2	3	4	5
***f*(*x*)**	–1	–3	–5	–7



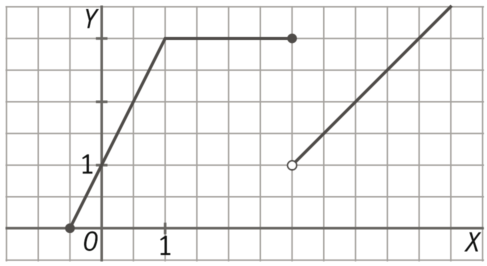
12. Actividad interactiva

13. ¿Son continuas o discontinuas? Indica, en su caso, los puntos de discontinuidad.

a)



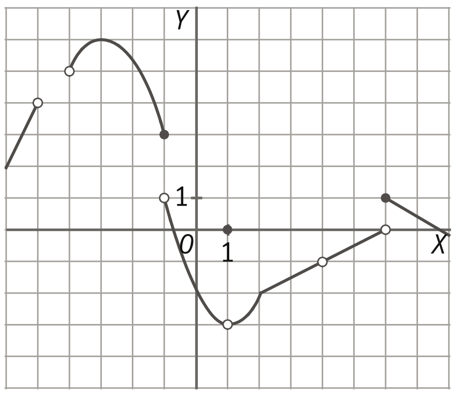
b)



a) La función no presenta saltos en los intervalos del dominio, luego la función es continua en cada intervalo del dominio, es decir, es continua en $[0,8]\cup[10,14]\cup[16,24]$.

b) La función presenta un salto en x = 3, es decir, la función es discontinua en x = 3.

14. Observa la gráfica y contesta:



a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Y el recorrido?

c) ¿En qué puntos es discontinua? ¿Cuánto vale la función en esos puntos?

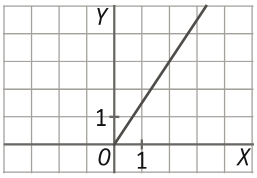
a) El dominio es $(-\infty,-5)\cup(-4,4)\cup(4,+\infty)$.

b) El recorrido es $(-3,6]$.

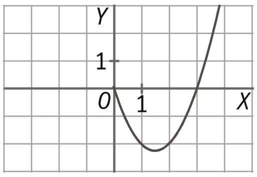
c) Es discontinua en x = –1, x = 1, x = 4 y x = 6. En esos puntos la función vale $f(-1)=3$, $f(1)=0$ y $f(6)=1$.

15. Copia y completa en tu cuaderno las siguientes gráficas para que cada una de las funciones resultantes sean:

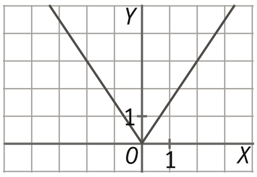
a) Pares



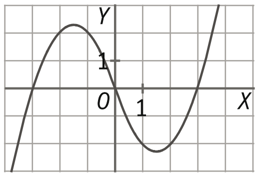
b) Impares



a)



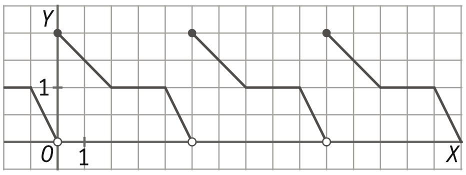
b)



16. Decide si $f(x) = x^2 + 2$ es par, impar o ninguna de las dos.

$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$. Luego $f(x)$ es par.

17. Observa la gráfica de la siguiente función periódica y contesta:



a) Halla el periodo.

b) Calcula $f(23)$, $f(-7)$ y $f(1342)$.

a) Periodo $T = 5$.

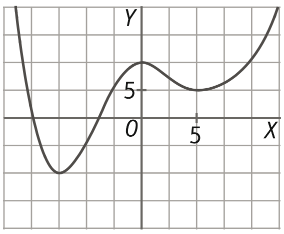
b) $f(23) = f(3) = 1$ (pues $23 = 4\cdot 5 + 3$)

$f(-7) = f(-2) = 1$ (pues $-7 = -1\cdot 5 - 2$)

$f(1342) = f(2) = 1$ (pues $1342 = 268\cdot 5 + 2$)

18. Actividad resuelta

19. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función:



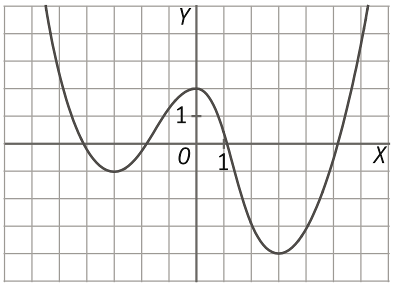
Decreciente en $\left(-\infty, -\frac{15}{2}\right) \cup (0, 5)$ y creciente en $\left(-\frac{15}{2}, 0\right) \cup (5, +\infty)$.

Mínimo relativo en $x = -\frac{15}{2}$ y en $x = 5$. Máximo relativo en $x = 0$.

El mínimo en $x = -\frac{15}{2}$ es también mínimo absoluto.

20. Dibuja una función que sea creciente en $(-3,0)\cup(3,+\infty)$, decreciente en $(-\infty,-3)\cup(0,3)$ y con extremos en los puntos $(-3,-1);(0,2)$ y $(3,-4)$. ¿Cómo son esos extremos?

Respuesta modelo:



$(-3,-1)$, $(3,-4)$ son mínimos relativos y $(0,2)$ es máximo relativo.

$(3,-4)$ es también mínimo absoluto.

21. Estudia si son crecientes, decrecientes o constantes:

a) ***x*: Longitud de la circunferencia.**

***y*: Área del círculo correspondiente.**

b) ***x*: Tiempo que lleva un tren viajando.**

***y*: Distancia al destino.**

a) Es creciente porque cuando aumenta la longitud de la circunferencia aumenta también el radio de ella. Por lo tanto, aumenta el área del círculo.

b) Es decreciente, porque cuando aumenta el tiempo que lleva viajando un tren menor es la distancia al destino.

22. En las siguientes correspondencias, decide cuál es el conjunto inicial, cuál es el final y si son o no funciones.

a) A cada compañero de clase le hacemos corresponder el número de hermanos que tiene.

b) A cada número positivo le hacemos corresponder los triángulos cuya base mide ese número en cm.

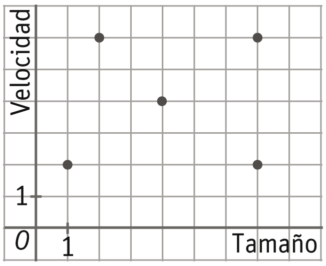
a) El conjunto inicial está formado por cada uno de los compañeros de clase y el conjunto final es el número de hermanos. Sí es una función porque a cada compañero de clase le corresponde un único número de hermanos.

b) El conjunto inicial está formado por los números positivos y el conjunto final está formado por los triángulos cuya base mide ese número en cm. No es función porque un número positivo puede ser base de, al menos, dos triángulos distintos, por ejemplo, 3 puede ser base del triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5cm o también del triángulo de lados 3 cm, 2 cm y 4 cm.

23. Lee con atención las siguientes descripciones de superhéroes:

- **Antino: diminuto como un garbanzo pero rápido como una flecha.**
- **Biteca: se parece a un lobo pero siempre va andando.**
- **Colibra: más grande que un orangután y más rápido que una gacela.**
- **Dufi: también le llaman el caracol – guisante.**

a) Identifica en tu cuaderno cada personaje con un punto.

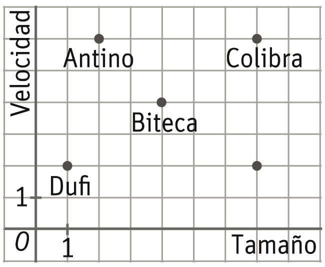


b) El punto que queda sin identificar es el que corresponde a Erandio. Invéntate una descripción para este superhéroe.

c) ¿Cuál es el conjunto inicial y el conjunto final de esta correspondencia?

d) ¿Es esta correspondencia una función? Justifica tu respuesta.

a)



b) Erandio, grande como un orangután y lento como un caracol.

c) El conjunto inicial es el tamaño y el conjunto final es la velocidad.

d) No es una función porque a un mismo tamaño de superhéroe le corresponden dos velocidades distintas.

24. Representa las funciones dadas a partir de estas tablas.

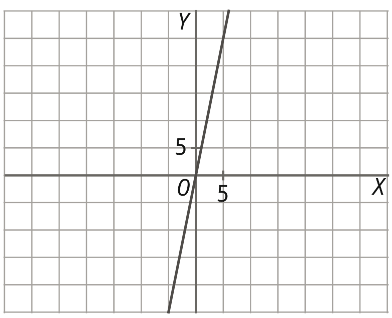
a)

x	–2	–1	0	1	2	5
y	–10	–5	0	5	10	25

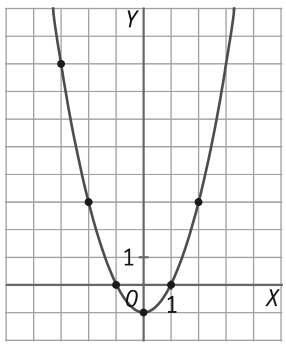
b)

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	8	3	0	–1	0	3

a)



b)



25. Para las siguientes funciones: calcula la fórmula, construye una tabla de valores y representa gráficamente.

a) La función que representa el volumen de un cilindro cuya base tiene una superficie de 2 m^2 en función de su altura.

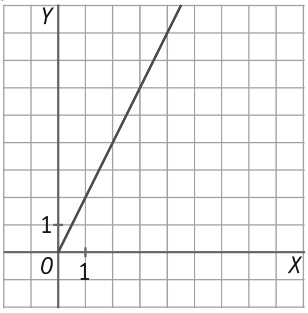
b) La función que representa el beneficio de un producto si se vende a cuatro veces su coste.

a) Si llamamos *x* a la altura del cilindro e *y* a su volumen, entonces, $y = 2x$.

Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

Representación:

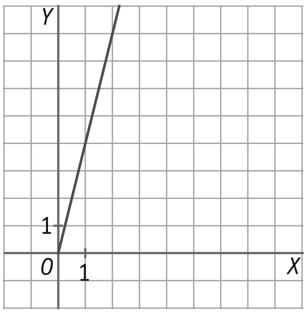


b) Si llamamos *x* al coste de un producto e *y* a su beneficio, entonces, $y = 4x$.

Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6
y	4	8	12	16	20	24

Representación:



26. Haz una tabla de valores y representa la función. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 5 \\ -x+6 & \text{si } 5 < x \end{cases}$

Indica su dominio y su recorrido.

Si $x \le 1$

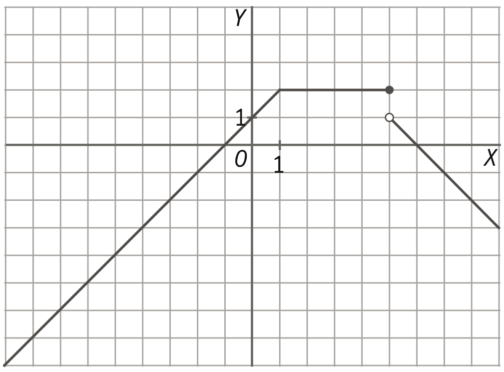
x	–2	–1	0	1
***f*(*x*)**	–1	0	1	2

Si $1 < x \le 5$

x	5	2	3	4
***f*(*x*)**	2	2	2	2

Si $x > 5$

x	6	7	8	9
***f*(*x*)**	0	–1	–2	–3



El dominio son todos los números reales y la imagen es $(-\infty, 2]$.

27. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$:

a) Calcula $f(3)$, $f(-1)$, $f(0)$.

b) ¿Existe algún valor de x para el que $f(x) = -2$? ¿Y para que $f(x) = 4$?

a) $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 = 8$

$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$

b) Para $f(x) = -2$ se resuelve $x^2 - 3x + 4 = -2$, entonces, $x^2 - 3x + 4 = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$.

Esta ecuación de segundo grado no tiene solución porque el discriminante $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15 < 0$.

No existe un valor para *x* tal que $f(x) = -2$.

Para $f(x) = 4$ se resuelve $x^2 - 3x + 4 = 4$, entonces, $x^2 - 3x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

Los valores $x_1 = 0, x_2 = 3$ cumplen $f(0) = 4$ y $f(3) = 4$.

28. Una empresa de descargas musicales ofrece la siguiente tarifa a sus clientes: 10 € fijos al mes más 20 CENT por cada canción descargada.

a) Encuentra la función que relaciona el precio mensual y el número de canciones descargadas, indicando cuáles son las variables dependiente e independiente.

b) Si mi primo descargó 25 canciones en un mes, ¿cuánto le cobraron?

c) Si mi prima pagó un total de 52 € el mes pasado, ¿cuántas canciones descargó?

a) La función que relaciona el precio mensual y el número de canciones descargadas es:

$$y = 10 + 0,20x$$

La variable independiente es *x*, el número de canciones descargadas y la variable dependiente es *y*, el precio mensual.

b) Si *x* = 25:

$y = 10 + 0,20 \cdot 25 = 15$

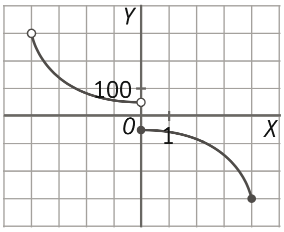
Le cobraron 15 €.

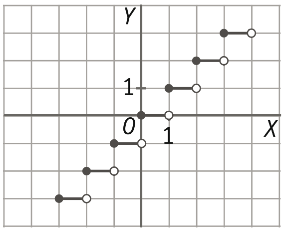
c) Si *y* = 52:

$$52 = 10 + 0,20x \Rightarrow 42 = 0,20x \Rightarrow x = \frac{42}{0,20} = 210$$

Se descargó 210 canciones.

29. Observa las siguientes gráficas y contesta:

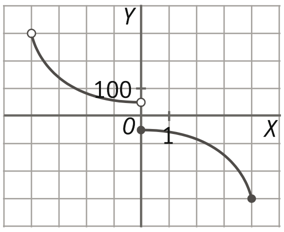


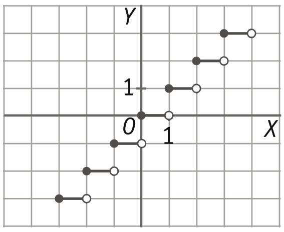


a) ¿Cuál es el dominio de cada función? ¿Y el recorrido?

b) ¿Son las funciones continuas?

c) ¿Dónde son discontinuas? Indica, en caso de existir, cuánto vale la función allí.





a) Dominio: $(-4, 4]$

Recorrido: $[-300, -50] \cup (50, 300)$

b) No es continua.

c) Presenta un salto en $x = 0$ y $f(0) = -50$

Dominio: $[-3, 4)$

Recorrido: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

No es continua.

Presenta saltos en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

La función en esos puntos vale:

$f(-3) = -3$, $f(-2) = -2$, $f(-1) = -1$,
$f(0) = 0$, $f(3) = 3$, $f(2) = 2$, $f(1) = 1$

30. Actividad resuelta

31. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \le 3 \\ (x-1)(x+a) & \text{si } 3 < x \end{cases}$**, calcula el valor de *a* para que sea continua en $x = 3$.**

Para que sea continua en $x = 3$, no debe haber salto, por lo que los dos trozos deben valer lo mismo en ese punto.

$3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = (3-1)(3+a) \Rightarrow 2 = 6 + 2a \Rightarrow a = \frac{-4}{2} = -2$. Luego $a = -2$.

32. En una cabina telefónica, los dos minutos iniciales cuestan 0,50 €. A partir de entonces, cada minuto o fracción cuesta 0,10 €.

a) ¿Cuánto pagarás por una conversación de 5 minutos y 20 segundos? ¿Y por una de 5 minutos y 55 segundos?

b) Dibuja la gráfica del precio pagado en función del tiempo para los primeros 10 minutos de conversación.

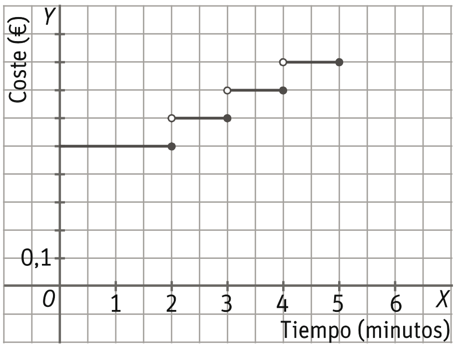
c) ¿Cuánto puedo hablar, como máximo con 1 €?

d) ¿Es continua la función? ¿Dónde es discontinua?

a) Si por cada minuto o fracción a partir de dos minutos se pagan 0,10 €, cuestan lo mismo las dos llamadas. Se pagan los dos minutos iniciales más 3 minutos completos, más la fracción de minuto restante:

$0,50 + 3 \cdot 0,10 + 0,10 = 0,90$ €.

b)



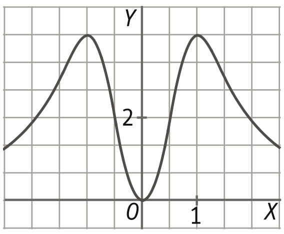
c) Por las condiciones de la tarifa de la cabina con 0,50 € podemos hablar los dos primeros minutos. Después:

$0,5 = 0,10x \Rightarrow x = \dfrac{0,50}{0,10} = 5$, es decir, podemos hablar 5 minutos más. Luego, con 1 € podemos hablar como máximo 7 minutos.

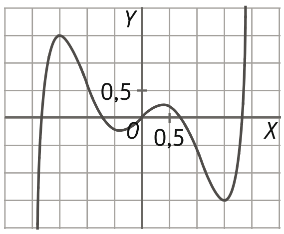
d) No es continua. A partir de $x = 2$, hay un salto cada minuto.

33. Decide qué tipo de simetría tiene cada una de estas funciones:

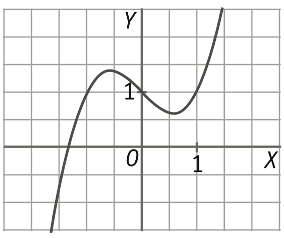
a)



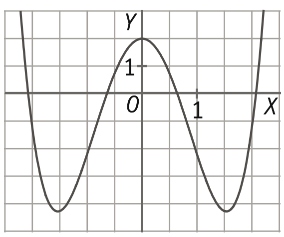
c)



b)

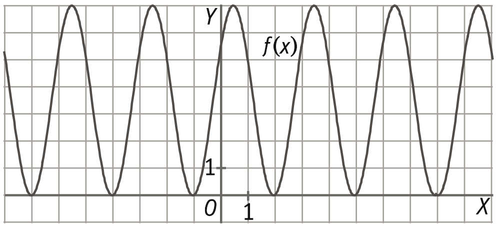


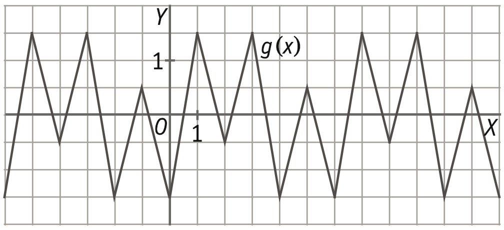
d)



a) Par. **b)** No tiene. **c)** Impar. **d)** Par.

34. Observa y contesta.





a) ¿Son las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) periódicas? En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo?

b) Calcula, si es posible, el valor de cada función en *x* =150.

a) Sí son periódicas. La función $f(x)$ tiene periodo $T = 3$ y la función $g(x)$ tiene periodo $T = 6$.

b) Como 150 = 50·3 + 0, entonces $f(150) = f(0) = 5{,}5$.

Como 150 = 25·6+0, entonces $g(150) = g(0) = –3$.

35. Decide si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = x^2 + 4$ **b)** $h(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$ **c)** $g(x) = x^3 - 5x$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$. Función par.

b) $h(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^3 - 1} = \dfrac{-x}{-x^3 - 1}$. No es función par ni función impar.

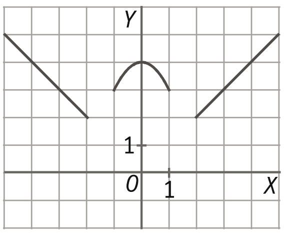
c) $g(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$. Función impar.

d) $i(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 + 1} = i(x)$. Función par.

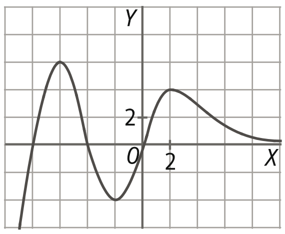
36. Actividad resuelta

37. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones e indica las coordenadas de sus máximos y mínimos absolutos y relativos.

a)



b)



a) Crecimiento: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$

Máximo absoluto: No tiene.

Mínimo absoluto: No tiene.

Máximo relativo: $(0, 4)$

Mínimo relativo: No tiene.

b) Crecimiento: $(-\infty, -6) \cup (-2, 2)$

Decrecimiento: $(-6, -2) \cup (2, +\infty)$

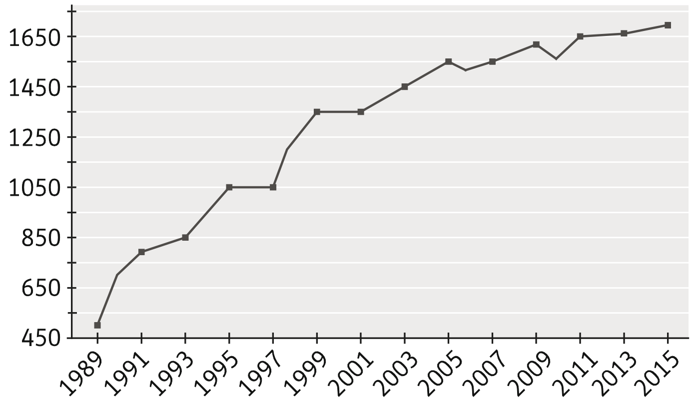
Máximo absoluto: $(-6, 6)$

Mínimo absoluto: No tiene.

Máximo relativo: $(-6, 6), (2, 4)$

Mínimo relativo: $(-2, -4)$

38. La siguiente gráfica muestra el número de donaciones de órganos en los últimos años en España:



a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla sus máximos y mínimos.

c) A la vista de la gráfica, ¿cómo crees que variará el número de donantes en el futuro?

a) Crecimiento: $(1989, 1995) \cup (1997, 1999) \cup (2001, 2005) \cup (2006, 2009) \cup (2010, 2015)$

Decrecimiento: $(2005, 2006) \cup (2009, 2010)$

La función permanece constante en $(1995, 1997) \cup (1999, 2001)$

b) Máximo relativo en 2005 con 1550 donantes y en 2009 con unos 1600 donantes. El máximo absoluto se obtiene en 2015 con unos 1700 donantes.

Mínimo relativo en 2006 con unos 1500 donantes y en 2010 con 1500 donantes. El mínimo absoluto se obtiene en 1989 con unos 500 donantes.

c) La gráfica tiende a estabilizarse, entonces el número de donantes en el futuro tiende a estabilizarse sobre los 1650 donantes.

39. ¿Por qué una función puede cortar como mucho una sola vez al eje de ordenadas?

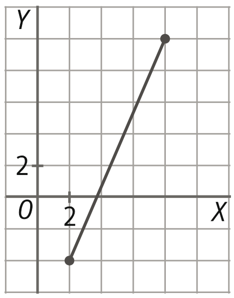
Porque si lo cortara en más de un punto, existirían varios puntos de la gráfica con la misma coordenada *x*, $x = 0$.

40. ¿Cuánto vale una función impar en $x = 0$? ¿Y una par?

Una función impar en $x = 0$ siempre vale 0. El valor de una función par en $x = 0$ depende de la expresión de la función. Si no tiene término independiente vale 0 y si tiene término independiente vale el valor de este.

41. Si una función continua verifica que $f(2) = -4$ y $f(8) = 10$, debe existir al menos un número a entre 2 y 8 en el que $f(a) = 0$. ¿Es cierta esta afirmación? Ayúdate del dibujo de una gráfica para comprobarlo.

Sí es cierta esta afirmación porque por ser continua y tener distinto signo en $x = 2$ y $x = 8$, la función debe cortar al menos en un valor a del eje X del intervalo $(2, 8)$, es decir, $f(a) = 0$.



42. Una empresa cuenta con 36 trabajadores que levantan un muro en una hora. Manteniendo este ritmo de trabajo, encuentra la función que relaciona el número de trabajadores con el tiempo que se tarda en levantar el muro. Para ello sigue estos pasos:

1.º Elige la variable dependiente y la variable independiente.

2.º Realiza una tabla de valores eligiendo los valores de la variable independiente adecuadamente.

3.º Representa los puntos obtenidos en unos ejes.

4.º ¿Tiene sentido unir estos puntos?

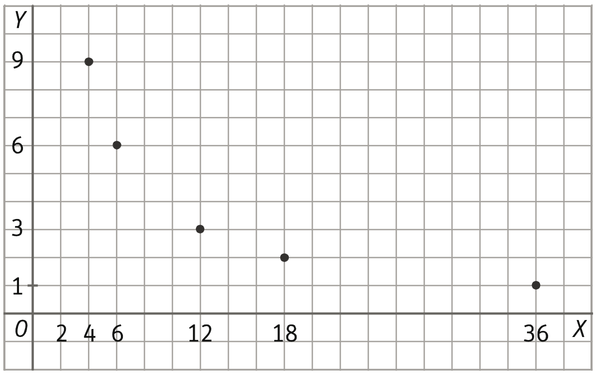
1.º Variable independiente, x: Tiempo que tardan los trabajadores en levantar un muro.

Variable dependiente, y: Número de trabajadores.

2.º Tabla de valores:

x	36	18	12	6	4
y	1	2	3	6	9

3.º Representación de los puntos obtenidos:



4.º No tiene sentido unir los puntos porque la función no puede tomar valores intermedios, el número de trabajadores es un número natural.

43. En una joyería venden el oro de esta manera: cada gramo de oro cuesta 30 € y cobran 3 € fijos de gastos de compra venta.

a) Encuentra la función que relaciona los gramos de oro comprados, *x*, con el precio en euros, *y*.

b) ¿Cuánto se pagará por 25 gramos de oro?

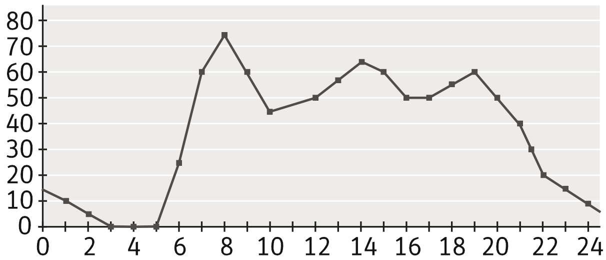
c) Si Luis ha pagado un total de 183 €, ¿cuántos gramos de oro compró?

a) $y = 3 + 30x$

b) $y = 3 + 30 \cdot 25 = 3 + 750 = 753$. Se pagará 753 €.

c) $183 = 3 + 30x \Rightarrow 180 = 30x \Rightarrow x = \dfrac{180}{30} = 6$. Luis compró 6 g de oro.

44. La gráfica muestra el número de usuarios que utilizan una línea del metro de una ciudad a lo largo de un día:



a) ¿Qué se representa en cada eje?

b) ¿En qué horario está el metro cerrado?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

d) ¿Es una función continua?

e) Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

f) Indica dónde alcanza la función sus máximos y sus mínimos y si estos son relativos o absolutos.

a) En el eje de abscisas (*X*) se representan las horas del día y en el eje de ordenadas (*Y*) se representa el número de usuarios.

b) Está cerrado desde las 3 de la madrugada hasta las 5 de la madrugada.

c) El dominio es el intervalo $[0,24]$

d) Si es continua, porque no presenta saltos.

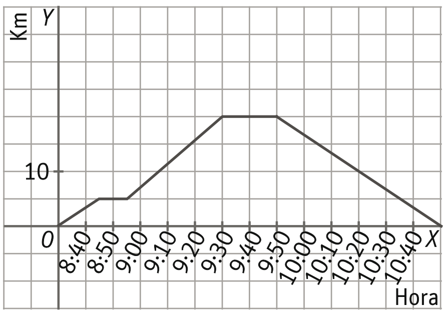
e) Creciente: $(5,8)\cup(10,14)\cup(17,19)$

Decreciente: $(0,3)\cup(8,10)\cup(14,16)\cup(19,24)$

f) Máximos relativos: x = 8, x = 14, x = 19. En x = 8 se tiene un máximo absoluto.

Mínimos relativos: x = 10. No tiene mínimo absoluto.

45. Un ciclista sale de excursión a las 8:30 a un lugar que dista 20 km de casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 5 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda su marcha y llega a su destino una hora después de haber salido. Permanece allí 20 minutos y después vuelve a casa sin efectuar ninguna parada, llegando a las 10:50. Representa la gráfica tiempo – distancia a casa.



46. Actividad resuelta

47. En la entrada del parking del aeropuerto se ve este cartel.

a) ¿Cuál es el precio de una hora de estancia?

b) ¿A partir de cuánto tiempo se paga el máximo diario posible?

c) Escribe la fórmula de la función que expresa el precio según el tiempo de estacionamiento.

d) Dibuja la gráfica. ¿Es continua la función?

a) 0,04·60 = 2,4. El precio de una hora de estancia es 2,40 €.

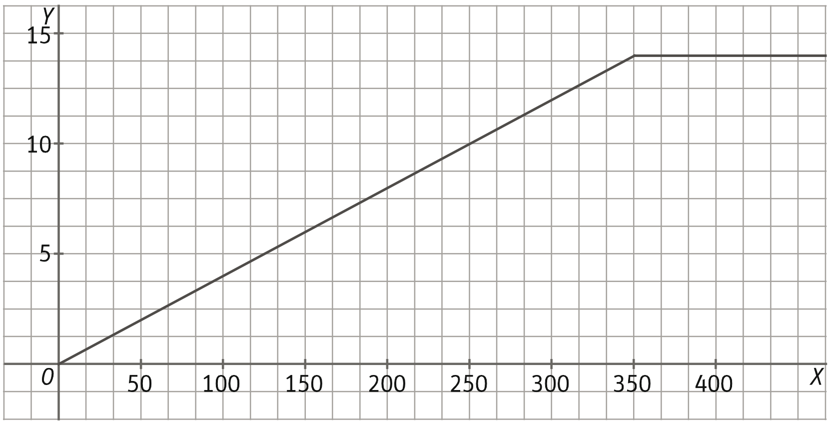
b) Si llamamos *x* al tiempo en minutos, entonces hay que resolver $14 = 0{,}04x \Rightarrow x = \dfrac{14}{0{,}04} = 350$ minutos.

Se paga el máximo diario posible a partir de las 5 horas y 50 minutos de estacionamiento.

c) Si *y* es el precio en euros, *x* el tiempo en minutos, entonces la fórmula es:

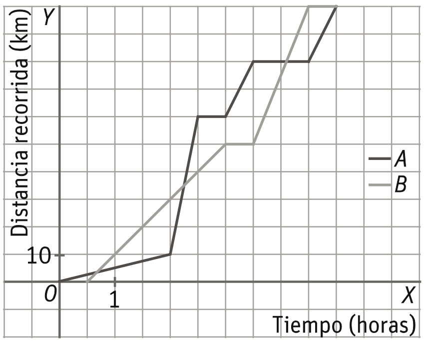
$$y = 0{,}04x$$

d)



Sí es continua, no presenta saltos.

48. Observa la gráfica y contesta.



a) Si el móvil *A* comenzó su movimiento a las 9:00 horas, ¿a qué hora partió el *B*?

b) ¿Qué distancia recorre cada móvil en total? ¿Cuánto tarda cada móvil en recorrer dicha distancia?

c) ¿A qué hora llega cada móvil a su destino?

d) ¿Se encuentran los móviles alguna vez? ¿A qué hora? ¿A qué distancia del punto de partida?

e) ¿Qué móvil llegará antes a 60 km del punto de partida? ¿Y a 90 km? ¿Y a 35 km?

f) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra cada móvil a las 11:00?

a) El móvil *B* partió a las 9:30.

b) Cada móvil recorre 100 kilómetros. El móvil *A* tarda 5 horas y el móvil *B* tarda 4 horas.

c) El móvil *A* llega a su destino a las 14:00 horas y el móvil *B* llega a su destino a las 13:30 horas.

d) Se encuentran dos veces. La primera vez, aproximadamente, a las 11:15 horas, a 35 km del punto de partida. La segunda vez un poco después de las 13:00 horas, a 80 km del punto de partida.

e) A 60 km tarda menos en llegar el móvil *A* porque tarda dos horas y media.

A 90 km tarda menos en llegar el móvil *B* porque tarda tres horas y cuarenta y cinco minutos.

A 35 km llega antes el móvil *B* que tarda una hora y cuarenta y cinco minutos.

f) A las 11:00 horas el móvil A se encuentra a 10 km y el móvil B se encuentra a 30 km.

49. Juan quiere construir un rectángulo de manera que la altura más la base sumen 6 cm.

a) Halla la expresión del área del rectángulo en función de su altura.

b) Indica qué valores puede tomar la altura (el dominio de la función para este problema concreto).

c) Haz una tabla de valores y dibuja dicha función.

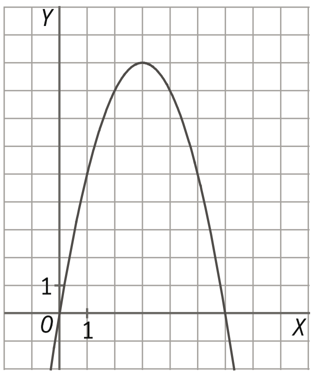
d) ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el área? ¿Para qué valor de la altura se alcanza?

a) Si llamamos x a la altura del rectángulo e y a su área, entonces: $y = x(6-x) = -x^2 + 6x$.

b) Dominio: $(0, 6)$

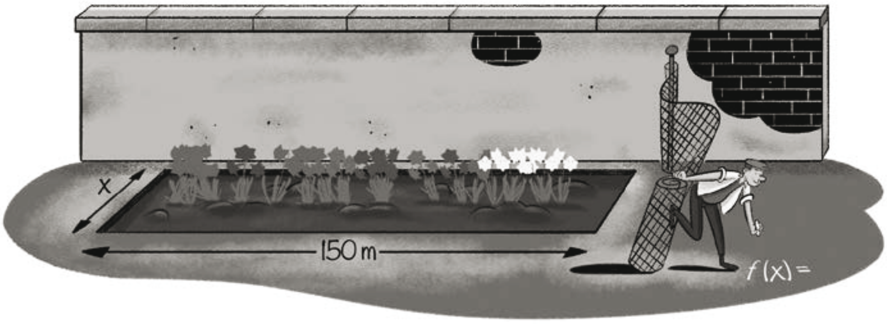
c)

x	1	2	3	4	5
y	5	8	9	8	5



d) El máximo valor del área es 9 y se obtiene para x = 3.

50. Con 250 m de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared.



a) Llama *x* a uno de los lados de la valla. ¿Cuál es el perímetro?

b) ¿Cuál es la fórmula de la función del área del recinto?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

d) Realiza una tabla de valores y dibuja la función del área en función de *x*

e) ¿Cuándo alcanza el máximo y cuánto vale ese máximo?

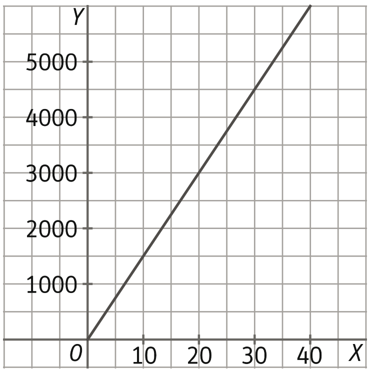
a) El perímetro es $p(x) = 150 + 2x$.

b) Si llamamos $f(x)$ al área del recinto, entonces $f(x) = 150 \cdot x$

c) Teniendo en cuenta que la longitud de la valla es como máximo 250 m, el valor de x puede estar entre 0 y 50, por lo que el dominio $[0, 50]$.

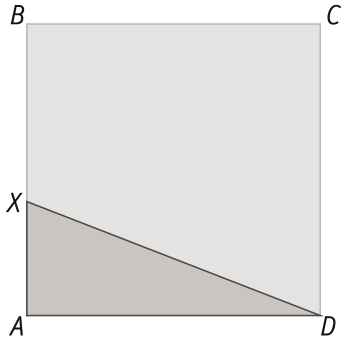
d) Tabla de valores:

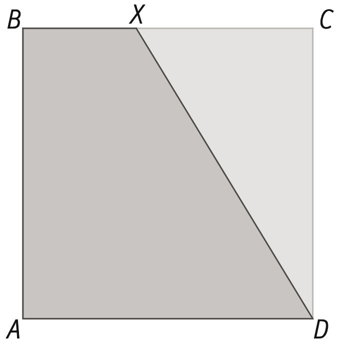
x	0	10	20	30	40	50
***f*(*x*)**	0	1500	3000	4500	6000	7500



e) Alcanza el máximo para $x = 50$ y el área máxima del recinto puede ser 7500 m^2.

51. En el cuadrado *ABCD* de lado 4 cm, un punto *X* se desliza de *A* hacia *B* y cuando alcanza *B* luego continúa de *B* hasta *C*.





A medida que el punto *X* se mueve, se van formando triángulos y luego trapecios (en verde oscuro), para terminar en un cuadrado.

a) Si *x* es la distancia que ha recorrido el punto *X* desde que sale de *A*, calcula la función *f*(*x*) que define el área de las figuras verde oscuro que va originando el punto *X* en su trayecto de *A* hasta *C*.

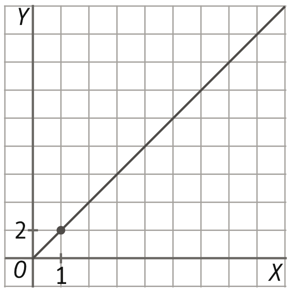
b) ¿Cuál es el dominio de la función *f*(*x*)?

c) Dibuja la gráfica de la función *f*(*x*). ¿Es continua?

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{(x-4)+4}{2}\cdot 4 & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 2x & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases}$

b) Dominio: $[0,8]$

c)

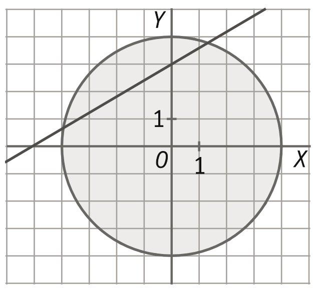


Es continua.

52. Sea *n* el número de puntos (*x*, *y*) del plano que satisfacen las relaciones $5y-3x=15$ y $x^2+y^2\le 16$. El valor de *n* es:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** ∞

Si representamos sobre los mismos ejes de coordenadas la circunferencia $x^2+y^2=16$ y la recta $5y-3x=15$ se observa que la recta es secante a la circunferencia, entonces hay infinitos puntos que satisfacen las relaciones $5y-3x=15$ y $x^2+y^2\le 16$. La respuesta correcta es **D.**



53. La tabla adjunta muestra la distancia *s* recorrida por una bola en un plano inclinado durante *t* segundos:

t	0	1	2	3	4	5
s	0	10	40	90	160	250

La distancia recorrida para *t* = 2,5 segundos, es:

A. 45 **B. 62,5** **C. 70** **D. 75**

Si observamos la tabla el espacio es $10t^2$, entonces si *t* = 2,5 segundos el espacio es $10 \cdot (2,5)^2 = 62,5$. La respuesta correcta es **B.**

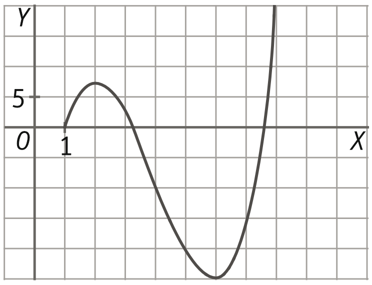
54. El mayor valor del producto de las coordenadas *x* e *y* de los puntos que satisfacen *x* + *y* = 1 es:

A. 1 **B. 0,5** **C. 0** **D. 0,25**

Es 0,25 que corresponde a los valores *x* = 0,5 e *y* = 0,5, es decir, la respuesta correcta es **D.**

Encuentra el error

55. Dada la siguiente función, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento e indica sus máximos y mínimos.



- **La función es creciente en los intervalos $(0,7) \cup (-25,+\infty)$ y decreciente en $(7,-25)$**
- **Tiene un mínimo relativo en 0, un mínimo absoluto en –25, un máximo relativo en 7 y no tiene máximo absoluto.**

¿Qué errores hay en esta solución?

La función es creciente en $(1,2) \cup (6,+\infty)$ y no en $(0,7) \cup (-25,+\infty)$.

La función es decreciente en $(2,6)$ y no en $(7,-25)$.

No tiene un mínimo relativo en *x* = 0, tiene un mínimo relativo en *x* = 6 que además es mínimo absoluto y no –25.

No tiene un máximo relativo en *x* = 7, tiene un máximo relativo en *x* = 2.

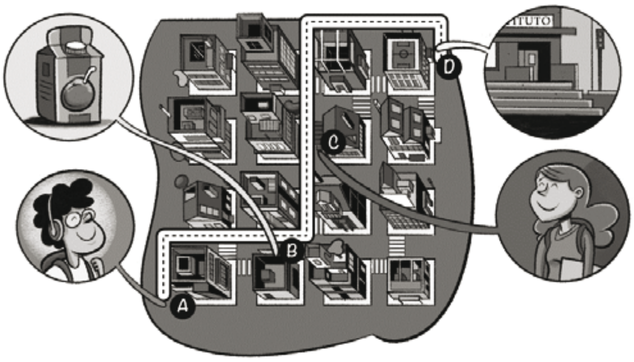
Ponte a prueba

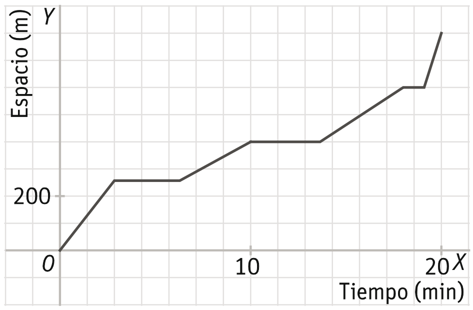
El café

Actividad resuelta

De camino a clase

Todas las mañanas Joaquín sale de su casa, para en la tienda a comprar un zumo, después se encuentra con Bea en la esquina de su casa y caminan juntos hasta su centro escolar. Cada manzana mide 100 m y hay semáforos en varias esquinas. Observa el plano del recorrido que hace Joaquín y la gráfica espacio-tiempo y responde a las preguntas.





1. **¿Cuántos metros recorrió en total?**

   A. 20 m **B. 200 m** **C. 400 m** **D. 800 m**

   Observando la gráfica vemos que en total ha recorrido 800 m, es decir, la respuesta correcta es **D.**

2. **¿Cuánto tiempo tardó Joaquín en comprar el zumo?**

   Tarda tres minutos y medio aproximadamente.

3. **¿Encontró algún semáforo rojo en su trayecto? ¿Dónde?**

   Sí, encontró un semáforo rojo a 600 m de su casa.

4. **La hora de entrada al instituto son las 8:30 y Joaquín y Bea llegaron un minuto tarde a clase, ¿a qué hora salió Joaquín de casa?**

   Si tardó 20 minutos en realizar el trayecto y llegó un minuto tarde entonces Joaquín salió de su casa a las 8:11.

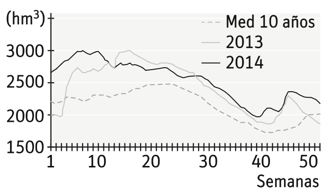
5. **¿A qué hora se encontró con Bea?**

   Se encontró con Bea a las 8:21.

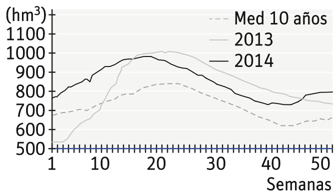
Reservas de agua

Sara está haciendo un pequeño trabajo de investigación sobre las reservas de agua en los últimos años y ha encontrado estas gráficas en internet.

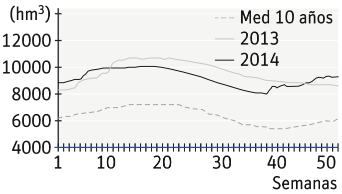
Galicia



Comunidad de Madrid



Andalucía



1. ¿Qué representan las gráficas? ¿Cuáles son las unidades utilizadas?

Las gráficas representan la variación de las reservas de agua en los años 2013, 2014 y la media de los diez años anteriores en Galicia, Comunidad de Madrid y Andalucía.

La unidad de medida utilizada para el tiempo (x) es la semana y para la reserva de agua (y) el hm^3.

2. Por término medio, ¿en qué meses se embalsa más agua en cada comunidad? ¿Cuánta se embalsa? ¿En qué mes disminuyen las reservas? ¿Qué ha ocurrido en los años 2013 y 2014?

Las tres comunidades embalsan más agua, por término medio, a finales de abril. Galicia 2500 hm^3, Comunidad de Madrid 850 hm^3 y Andalucía 7000 hm^3, aproximadamente. A partir de mayo empiezan a disminuir las reservas.

En el año 2013, en Galicia y en Andalucía se registró en la primera quincena de abril la mayor reserva de agua del año, unos 3000 hm^3 y unos 11 000 hm^3, respectivamente. En la Comunidad de Madrid la mayor reserva de agua se registró a finales de abril con 1000 hm^3, aproximadamente.

En el año 2014, la mayor reserva de agua embalsada se registro en Galicia a principios de febrero, unos 3000 hm^3, en la Comunidad de Madrid en la primera semana de abril con 1000 hm^3, aproximadamente, y en Andalucía en la primera semana de marzo con 10 000 hm^3.

Se observa que en los años 2013 y 2014 ha habido variaciones en los meses en los que se registra la mayor cantidad de agua embalsada.

3. ¿Cómo explicas que en Andalucía se embalse mucha más agua que en Galicia?

Hay mayor número de embalses y con mayor capacidad en Andalucía que en Galicia.

4. ¿Cómo han sido los años 2013 y 2014 con respecto a los últimos 10 años?

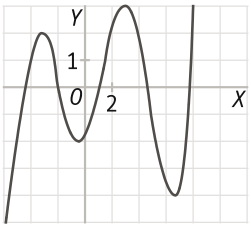
En los años 2013 y 2014 han aumentado las reservas de agua embalsada con respecto a la media de los últimos 10 años, excepto a principios del 2013 en Galicia, que era inferior a la media, y en la Comunidad de Madrid, que durante los dos primeros meses de 2013 era inferior a la media de los últimos diez años.

Autoevaluación

1. Estudia si las siguientes correspondencias son funciones. En caso afirmativo, describe su dominio:

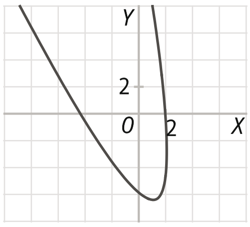
a) Número entero $\Rightarrow$ Múltiplos

b)



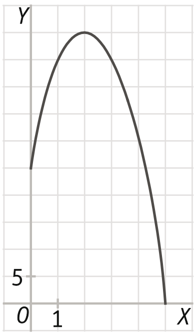
c) Número real $\Rightarrow$ Triple

d)



Son funciones b) y c). El dominio para b) y c) es el conjunto de los números reales. No es función a) porque a un número le corresponden varios múltiplos y tampoco d) porque, por ejemplo a x = 1 le corresponderían dos valores de y.

2. Desde una ventana se arroja una piedra hacia arriba. Observa la gráfica y contesta:



a) ¿Qué se representa en cada eje?

b) ¿Desde qué altura se lanzó la piedra?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?

d) ¿A qué altura llegó la piedra? ¿Cuánto tardó en llegar?

e) ¿Cuándo está la piedra a 45 m del suelo.

a) El eje X representa el tiempo, en segundos, que tarda en llegar la piedra al suelo. El eje Y representa la altura, en metros, que alcanza la piedra.

b) Se lanzó la piedra desde 25 m.

c) Tarda en llegar al suelo 5 segundos.

d) La piedra llegó a la altura de 50 m en 2 segundos.

e) La piedra está a 45 m del suelo al segundo de ser lanzada y a los 3 s.

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 8$:

a) Completa la siguiente tabla de valores:

x	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y	●	●	●	●	●	●	●	●

b) Dibuja la gráfica.

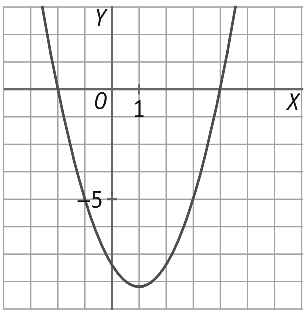
c) Escribe los intervalos de crecimiento y sus extremos.

d) Halla todos los valores de *x* donde la función vale 27.

a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0

b)



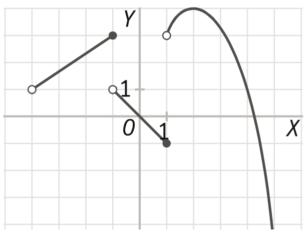
c) Crecimiento: $(1,+\infty)$.

Decrecimiento: $(-\infty,1)$.

Mínimo relativo y absoluto en x = 1.

d) Se resuelve $x^2 - 2x - 8 = 27$. Los valores de x son x = –5 y x = 7.

4. Observa la siguiente gráfica y contesta:



a) Calcula el dominio.

b) Calcula $f(-1)$, $f(3)$ y $f(4)$

c) Encuentra los valores de x tales que $f(x)=3$ y $f(x)=0$.

d) ¿Hay algún valor a tal que $f(x)=a$ para tres valores de x?

e) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos.

a) Dominio: $(-4,+\infty)$.

b) $f(-1)=3$, $f(3)=3$ y $f(4)=1$.

c) $f(x)=3$ para los valores $x = -1$ y $x = 3$.

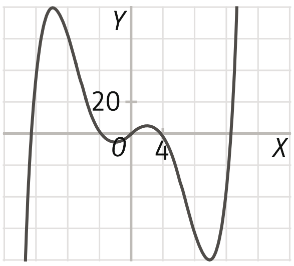
$f(x)=0$ para los valores $x = 0$ y $x = 4{,}25$, aproximadamente.

d) No

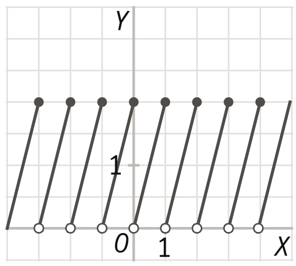
e) Crecimiento: $(-4,-1)\cup(1,2)$. Decrecimiento: $(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Máximo relativo en x = 2, que además es máximo absoluto. No tiene mínimos relativos ni mínimos absolutos.

5. De cada una de las siguientes funciones dadas por gráficas estudia:

a)



b)



a) Su dominio.

b) Su continuidad y discontinuidades.

c) Decide si son simétricas o periódicas.

d) Da los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos y absolutos.

a) Dominio de a): $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ Dominio de b)**:** $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

b) La función a) es continua en todo el dominio y la función b) es discontinua en los valores enteros.

c) La función a) es impar y la función b) es periódica.

d) La función a): Crecimiento: $(-\infty,-10)\cup(-2,2)\cup(10,+\infty)$ Decrecimiento: $(-10,-2)\cup(2,10)$. Tiene máximo relativo en $(-10,80)$ y mínimo relativo en $(10,-80)$ y no tiene extremos absolutos.

La función b): Crecimiento: $(n,n+1)$, siendo n un número entero. No tiene extremos relativos, ni extremos absolutos.