

7 Figuras planas

PIENSA Y SACA CONCLUSIONES

Comenta el significado del título que Barrow pone a este artículo.

Respuesta libre

INVESTIGA

¿En qué siglo vivió Pitágoras?

En el siglo VI a.C.

Si los babilonios y los chinos habían demostrado el teorema antes que él, ¿por qué se conoce como Teorema de Pitágoras?

Porque la escuela pitagórica fue la primera en demostrar el teorema formalmente.

¿Y TÚ QUE OPINAS?

Comenta la frase de Garfield: “pensamos que se trata de algo que puede unir a los miembros de ambas cámaras sin distinción de partido”.

Respuesta libre

¿Por qué las matemáticas pueden unir a gentes con ideas diferentes?

Respuesta libre

Actividades propuestas

1. Identifica al menos cinco polígonos diferentes en la siguiente figura:



Triángulo isósceles, trapecio rectángulo, cuadrilátero, pentágono y cuadrado.

2. Comprueba que la fórmula de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es cierta para el triángulo y el cuadrilátero.

Triángulo:

$$S = 180 \cdot (n - 2) \Rightarrow S = 180 \cdot (3 - 2) = 180^\circ$$

Cuadrado:

$$S = 180 \cdot (n - 2) \Rightarrow S = 180 \cdot (4 - 2) = 180 \cdot 2 = 360^\circ$$

3. Halla la suma de los ángulos interiores en cada caso:

- a) Un pentágono
- b) Un decágono
- c) Un polígono de 20 lados

a) $S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot (5-2) = 180 \cdot 3 = 540^\circ$
 b) $S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot (10-2) = 180 \cdot 8 = 1440^\circ$
 c) $S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot (20-2) = 180 \cdot 18 = 3240^\circ$

4. Halla la medida de cada uno de los ángulos interiores de:

- a) Un pentágono regular
- b) Un hexágono regular
- c) Un decágono regular

a) $\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot (5-2)}{5} = 108^\circ$
 b) $\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot (6-2)}{6} = 120^\circ$
 c) $\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot (10-2)}{10} = 144^\circ$

5. La suma de los ángulos de un polígono es 1620° . ¿Cuántos lados tiene el polígono?

$$S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow 1620 = 180n - 360 \Rightarrow n = \frac{1620 + 360}{180} = 11$$

El polígono tiene 11 lados.

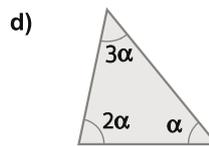
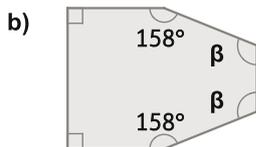
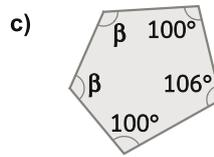
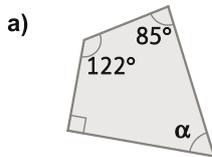
6. Los ángulos interiores de un polígono regular miden 150° . ¿Cuántos lados tiene el polígono regular?

$$\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \Rightarrow 150 = \frac{180n - 360}{n} \Rightarrow 150n = 180n - 360 \Rightarrow 180n - 150n = 360 \Rightarrow n = \frac{360}{30} = 12$$

El polígono regular tiene 12 lados.

7. Actividad resuelta.

8. Halla los ángulos desconocidos en estas figuras:



a) $S = 360^\circ \Rightarrow 360 = 90 + 122 + 85 + \alpha \Rightarrow \alpha = 360 - 297 = 63^\circ$
 b) $S = 180 \cdot 4 = 720^\circ \Rightarrow 720 = 90 + 90 + 158 + 158 + 2\beta \Rightarrow 2\beta = 720 - 496 \Rightarrow \beta = 112^\circ$
 c) $S = 180 \cdot 3 = 540^\circ \Rightarrow 540 = 100 + 106 + 100 + 2\beta \Rightarrow 2\beta = 540 - 306 \Rightarrow \beta = 117^\circ$
 d) $S = 180 \Rightarrow 180 = \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ$

9. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada uno de sus ángulos mide 135° ?

$$135 = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \Rightarrow 135n = 180n - 360 \Rightarrow 360 = 180n - 135n \Rightarrow 45n = 360 \Rightarrow n = 8$$

El polígono tiene 8 lados (octógono).

10. Actividad resuelta

11. Comprueba si las siguientes longitudes pueden o no formar un triángulo:

a) $x = 20$ $y = 25$ $z = 5$

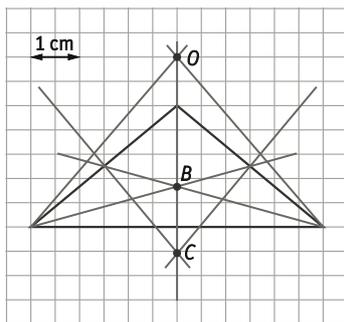
b) $x = 12,5$ $y = \frac{30}{7}$ $z = \sqrt{50}$

a) Hay que comprobar si la suma de las dos longitudes menores es mayor que la longitud del segmento mayor.

$$x + z = 20 + 5 = 25 = y \Rightarrow \text{No forman triángulo.}$$

b) $y + z = \frac{30}{7} + \sqrt{50} = 11,36 < 12,5 = x \Rightarrow \text{No forma triángulo.}$

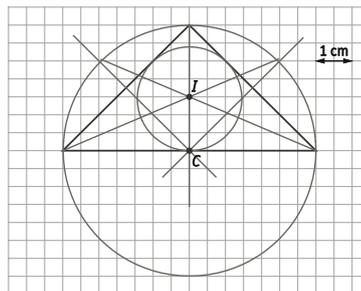
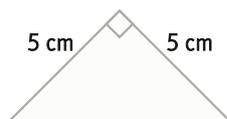
12. Dibuja un triángulo de lados 4 cm, 4 cm y 6 cm. Dibuja el baricentro, el circuncentro y su ortocentro. ¿Cuáles de ellos están en el interior del triángulo? ¿Qué posición relativa ocupan los tres puntos?



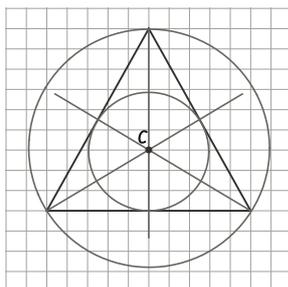
Solo queda dentro del triángulo el baricentro. Los otros dos son exteriores al polígono.

Los tres puntos forman una línea recta.

13. Copia este triángulo en tu cuaderno y dibuja el incentro y el circuncentro. Representa también las circunferencias inscrita y circunscrita.



14. Dibuja un triángulo equilátero de lado 5 cm y sus circunferencias inscrita y circunscrita.



Para ello hay que dibujar el incentro y el circuncentro, pero por ser equilátero coinciden en el mismo punto.

15. Tres segmentos miden a , $2a$ y $2a + 5$ cm respectivamente. ¿Cuáles son los posibles valores de a para que formen triángulo?

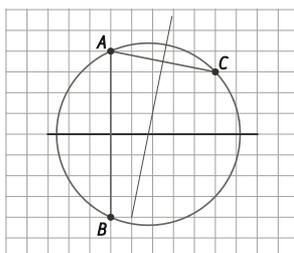
$a < 2a < 2a + 5 \Rightarrow$ Para que formen triángulo es necesario que se cumpla $a + 2a > 2a + 5$

$3a > 2a + 5 \Rightarrow a > 5$

16. Dibuja en tu cuaderno tres puntos que no estén alineados y traza la circunferencia que pasa por ellos.

Para poder obtener la circunferencia que pasa por los tres puntos, calculamos las mediatrices de los segmentos que se forman con dos de los puntos. La intersección de ellas será el centro de la circunferencia.

De hecho, basta con calcular dos de las mediatrices ya que la tercera cortará en el mismo punto.



17. El baricentro de un triángulo divide la mediana en dos segmentos. Si la mediana mide 6 cm, ¿cuánto mide cada segmento?

La distancia desde el baricentro a cada vértice es el doble que la distancia al punto medio del lado opuesto.

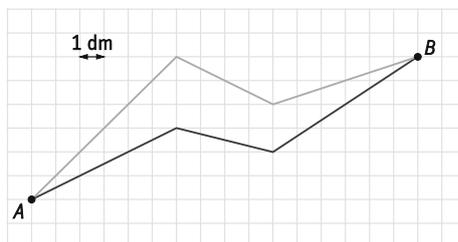
$6 = x + 2x = 3x \Rightarrow x = 2$

Un lado mide 2 cm y el otro 4 cm.

18. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

cateto b	cateto c	hipotenusa a
63 dm	16 dm	65 dm
1,3 m	8,4 m	8,5 m
11 cm	$\frac{48}{5}$ cm	14,6 cm
10 cm	11,18 cm	15 cm

19. Para ir del punto A al punto B se pueden seguir los caminos trazados en verde y en rojo. ¿Cuál de los dos es más corto? Ten en cuenta que la cuadrícula está formada por cuadrados de longitud 10 cm.



Camino verde (superior):

La diagonal de cada cuadrado mide $\sqrt{2}$ dm.

$l = 6 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{2^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} + \sqrt{20} + \sqrt{40} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} = 19,28$ dm

Camino rojo (inferior):

$l = \sqrt{6^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{45} + \sqrt{17} + \sqrt{52} = 3\sqrt{5} + \sqrt{17} + 2\sqrt{13} = 18,04$ dm

Es más corto el camino rojo.

20. Actividad resuelta

21. Comprueba si los siguientes segmentos forman o no un triángulo rectángulo:

- a) $a = 39$ cm $b = 80$ cm $c = 90$ cm
 b) $a = 20$ cm $b = 101$ cm $c = 99$ cm
 c) $a = 2$ cm $b = \frac{8}{3}$ cm $c = \frac{10}{3}$ cm
 d) $a = \sqrt{131}$ dm $b = \sqrt{125}$ dm $c = 16$ dm

a) $39^2 + 80^2 = 7921 + 6400 = 14321 \neq 90^2 = 8100$
 No forman triángulo rectángulo.

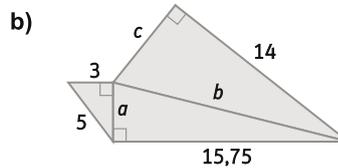
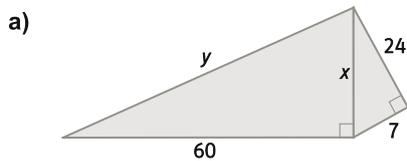
b) $20^2 + 99^2 = 400 + 9801 = 10201 = 101^2$
 Forman triángulo rectángulo.

c) $2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 4 + \frac{64}{9} = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$
 Forman triángulo rectángulo.

d) $(\sqrt{131})^2 + (\sqrt{125})^2 = 131 + 125 = 256 = 16^2$
 Forman triángulo rectángulo.

22. Actividad resuelta

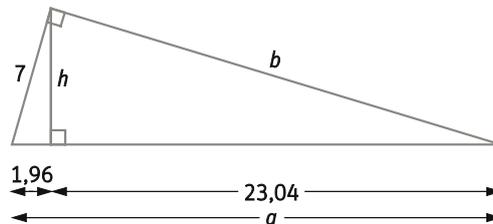
23. Calcula la medida de los lados desconocidos en las siguientes figuras:



a) $x^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow x = 25$
 $y^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow y^2 = 625 + 3600 = 4225 \Rightarrow y = 65$

b) $5^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow a = 4$
 $b^2 = a^2 + 15,75^2 \Rightarrow b = \sqrt{16 + 15,75^2} = 16,25$
 $b^2 = 14^2 + c^2 \Rightarrow 16,25^2 = 196 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{16,25^2 - 196} = 8,25$

24. Observa los ángulos rectos de la figura y calcula la altura y la longitud de la rampa.



$7^2 = 1,96^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{7^2 - 1,96^2} = 6,72$ m
 $b^2 = h^2 + 23,04^2 = 6,72^2 + 23,04^2 \Rightarrow b = \sqrt{6,72^2 + 23,04^2} = 24$ m

25. Suponiendo que $0 < v < u$, comprueba si las longitudes forman triángulo rectángulo :

$$a = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

$$b = u \cdot v$$

$$c = \frac{u^2 - v^2}{2}$$

¿Por qué es necesaria la condición inicial?

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 = (u \cdot v)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{u^4 + v^4 + 2u^2v^2}{4} = u^2v^2 + \frac{u^4 + v^4 - 2u^2v^2}{4}$$

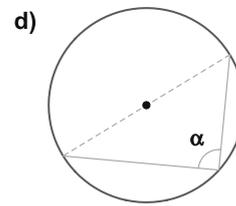
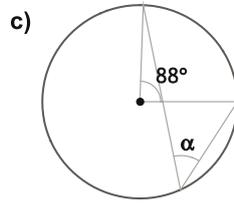
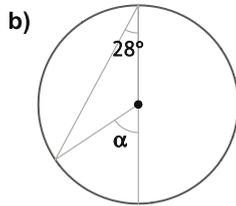
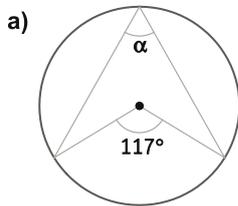
$$u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = 4u^2v^2 + u^4 + v^4 - 2u^2v^2 \Rightarrow 2u^2v^2 = 4u^2v^2 - 2u^2v^2 \Rightarrow 2u^2v^2 = 2u^2v^2$$

Se cumple la igualdad, por lo que forma un triángulo rectángulo.

Es necesaria la condición inicial para garantizamos que la longitud de c sea un número positivo.

26. Actividad resuelta

27. Calcula la medida de los ángulos desconocidos en las siguientes figuras:



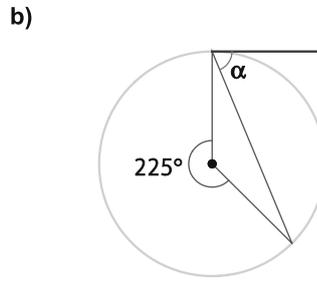
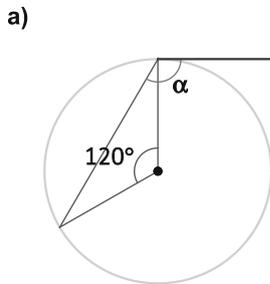
a) $\alpha = \frac{117}{2} = 58,5^\circ$

b) $\alpha = 28 \cdot 2 = 56^\circ$

c) $\alpha = \frac{88}{2} = 44^\circ$

d) $\alpha = \frac{180}{2} = 90^\circ$

28. Calcula la medida de los siguientes ángulos semiinscritos en circunferencias.

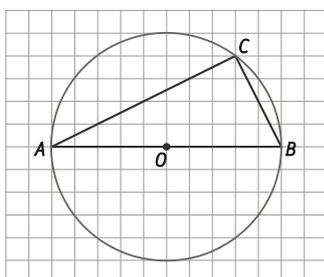


a) El ángulo interior mayor del triángulo es $360 - 225 = 135^\circ$.

El ángulo α está semiinscrito en la circunferencia, por lo que mide la mitad que el ángulo que hemos calculado anteriormente. Es decir, $\alpha = \frac{135}{2} = 67,5^\circ$.

b) El ángulo central correspondiente a la parte del ángulo de α que está en el triángulo es $180 - 120 = 60^\circ$. Así, la parte de α que es el ángulo del triángulo es $\frac{60}{2} = 30^\circ$. Luego, $\alpha = 90 + 30 = 120^\circ$.

29. Dibuja un triángulo inscrito en una circunferencia de forma que uno de sus lados sea el diámetro. Comprueba que el triángulo es rectángulo y que dicho diámetro es la hipotenusa.



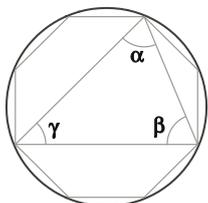
Como el ángulo central AOC es de 180° , entonces el ángulo inscrito ABC es de 90° y por tanto, es un triángulo rectángulo.

La única posibilidad es que el diámetro sea la hipotenusa, ya que esta se corresponde con el lado más largo en un triángulo rectángulo, y el diámetro es la distancia más larga ente dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

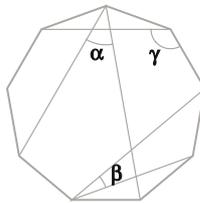
30. Actividad resuelta

31. Calcula la medida de los ángulos α , β y γ en las figuras:

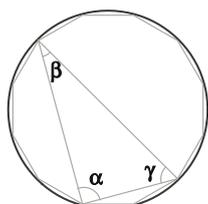
a)



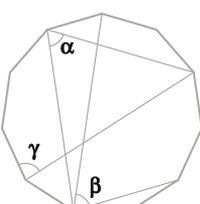
c)



b)



d)



a) Es un octógono regular inscrito en una circunferencia, luego a cada uno de sus lados le corresponde un arco de circunferencia de $\frac{360}{8} = 45^\circ$. El ángulo α determina un arco de circunferencia que se corresponde con 3 lados del polígono, por lo que el ángulo central será $45 \cdot 3 = 135^\circ$ y por tanto, α es la mitad, es decir, $\alpha = 67,5^\circ$. Además, $\beta = \alpha$, por las mismas características, luego $\beta = 67,5^\circ$. Finalmente, $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ$.

b) Es un dodecágono regular inscrito en una circunferencia. A cada uno de sus lados le corresponde un arco de circunferencia de $\frac{360}{12} = 30^\circ$. El ángulo β determina un arco de circunferencia que se corresponde con 2 lados del polígono, por lo que el ángulo central será $30 \cdot 2 = 60^\circ$ y por tanto, β es la mitad, es decir, $\beta = 30^\circ$. Como la hipotenusa del triángulo es el diámetro de la circunferencia, $\alpha = 90^\circ$ y $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ$.

c) Es un eneágono regular, que puede inscribirse en una circunferencia y a cada lado le corresponde un arco de circunferencia de $\frac{360}{9} = 40^\circ$. El ángulo inscrito α abarca dos lados del polígono, por tanto $\alpha = \frac{2 \cdot 40}{2} = 40^\circ$. El ángulo inscrito β determina un arco correspondiente a un lado del eneágono, por lo que abarca la mitad del ángulo central: $\beta = \frac{40}{2} = 20^\circ$. Por el mismo razonamiento, γ abarca 7 lados, por lo que $\gamma = \frac{7 \cdot 40}{2} = 140^\circ$.

d) Es un endecágono regular que podemos inscribir en una circunferencia para usar los razonamientos de los apartados anteriores. Así, a cada lado le corresponde un arco de circunferencia de $32,72^\circ$.

Como α abarca 4 lados del polígono, $\alpha = \frac{4 \cdot 32,72}{2} = 65,44^\circ$.

Como β abarca 5 lados del polígono, $\beta = \frac{5 \cdot 32,72}{2} = 81,80^\circ$.

Como γ abarca 6 lados del polígono, $\gamma = \frac{6 \cdot 32,72}{2} = 98,16^\circ$.

32. Actividad resuelta

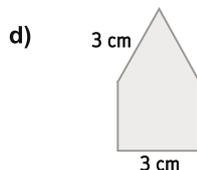
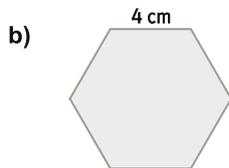
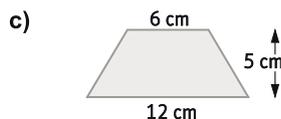
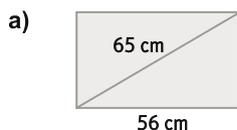
33. Halla el perímetro y el área de un triángulo isósceles de lados 5, 5 y 8 cm.

Perímetro: $5 + 5 + 8 = 18$ cm

Calculamos primero la altura del triángulo con el Teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

Área: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ cm²

34. Calcula el perímetro y el área de las figuras:



a) Lado: $l = \sqrt{65^2 - 56^2} = 33 \text{ cm}$

Perímetro: $P = 2 \cdot 56 + 2 \cdot 33 = 178 \text{ cm}$

Área: $A = b \cdot h = 56 \cdot 33 = 1848 \text{ cm}^2$

b) Apotema: $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$

Perímetro: $P = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{P \cdot a}{2} = 41,52 \text{ cm}^2$

c) Lado: $l = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ cm}$

Perímetro: $P = 5,83 \cdot 2 + 6 + 12 = 29,66 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{12+6}{2} \cdot 5 = 45 \text{ cm}^2$

d) Dividimos la figura en un triángulo equilátero y un cuadrado, ambos de lado 3 cm.

Triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3^2 - 1,5^2}}{2} = 3,9 \text{ cm}^2$

Cuadrado: $A = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$

Figura completa: Perímetro: $P = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$

Área: $A = 9 + 3,9 = 12,9 \text{ cm}^2$

35. Calcula el área de un rombo de lado 13 cm si se sabe que dos vértices opuestos están distanciados 10 cm entre sí.

Área del rombo: $A = \frac{D \cdot d}{2}$

Necesitamos calcular la otra diagonal y para ello usaremos el Teorema de Pitágoras.

$$\frac{D}{2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow D = 24 \text{ cm}$$

Por tanto, $A = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$.

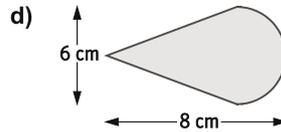
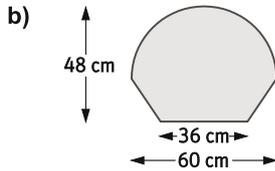
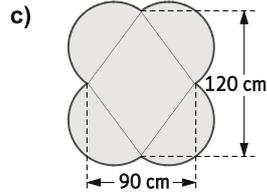
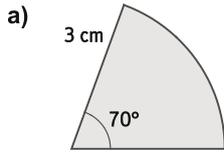
36. Actividad resuelta.

37. Calcula el área de un círculo inscrito en un cuadrado de lado 5 cm.

El radio del círculo será la mitad del lado del cuadrado en el que está inscrito, es decir 2,5 cm.

$A = \pi r^2 = 2,5^2 \pi = 19,64 \text{ cm}^2$

38. Calcula el perímetro exterior y el área de las siguientes figuras:



a) Perímetro exterior: $P = 3 + 3 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{360} \cdot 70 = 9,67 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360} \cdot 70 = 5,50 \text{ cm}^2$

b) Dividimos la figura en un semicírculo y un trapecio:

Semicírculo:

Perímetro exterior: $l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 30}{360} \cdot 180 = 94,25 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{\pi \cdot 30^2}{360} \cdot 180 = 1413,72 \text{ cm}^2$

Trapecio:

Para el trapecio necesitamos el lado: $l^2 = (48 - 30)^2 + \left(\frac{60 - 36}{2}\right)^2 = 18^2 + 12^2 \Rightarrow l = 21,63 \text{ cm}$

Perímetro exterior: $P = 21,63 \cdot 2 + 36 = 79,26 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{60 + 36}{2} \cdot 48 = 864 \text{ cm}^2$

Figura total:

Perímetro: $P = 79,26 + 94,25 = 173,51 \text{ cm}$

Área: $A = 864 + 1413,72 = 2277,72 \text{ cm}^2$

c) Dividimos la figura en cuatro semicírculos y un rombo. O lo que es equivalente, dos círculos y un rombo.

Rombo:

Lados del rombo (que será el diámetro de los círculos): $l^2 = \left(\frac{120}{2}\right)^2 + \left(\frac{90}{2}\right)^2 = 60^2 + 45^2 \Rightarrow l = 75 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{120 \cdot 90}{2} = 5400 \text{ cm}^2$

Círculos:

Perímetro exterior: $l = (2 \cdot \pi \cdot 37,5) \cdot 2 = 471,24 \text{ cm}$

Área: $A = 2 \cdot (\pi \cdot r^2) = 2 \cdot (\pi \cdot 37,5^2) = 8835,73 \text{ cm}^2$

Figura total:

Perímetro: $P = l = 471,24 \text{ cm}$

Área: $A = 5400 + 8835,73 = 14235,73 \text{ cm}^2$

d) Dividimos la figura en un triángulo isósceles y un semicírculo de radio 3.

Triángulo:

Perímetro exterior: $P = 2 \cdot (\sqrt{5^2 + 3^2}) = 11,66 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ cm}^2$

Semicírculo:

Perímetro exterior: $l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{360} \cdot 180 = 9,42 \text{ cm}$

Área: $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360} \cdot 180 = 14,14 \text{ cm}^2$

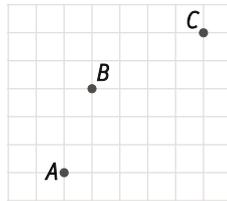
Figura total:

Perímetro: $P = 11,66 + 9,42 = 21,08 \text{ cm}$

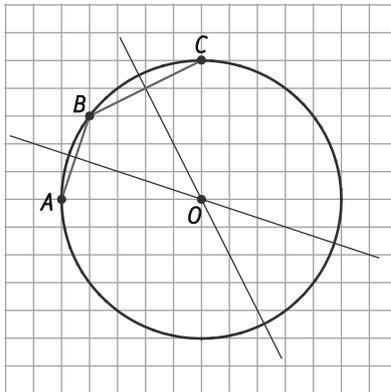
Área: $A = 15 + 14,14 = 29,14 \text{ cm}^2$

39. Actividad resuelta

40. Dibuja en tu cuaderno la circunferencia que pasa por los puntos A , B y C .

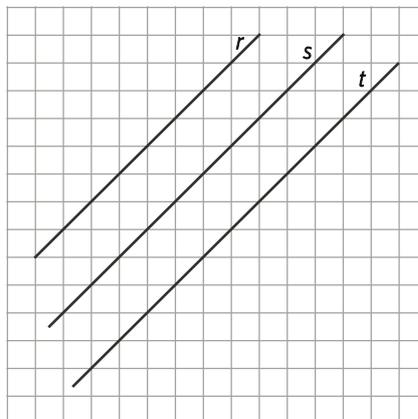


La circunferencia que para por los puntos A , B y C es:

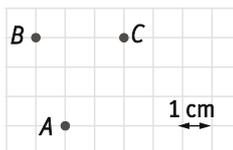


41. Se consideran dos rectas paralelas r y s . Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan el doble de r que de s .

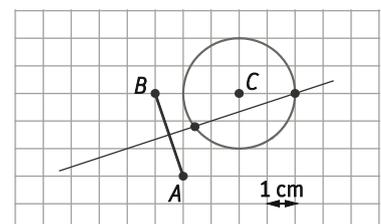
Será la recta t , paralela a las otras dos tal que s dista lo mismo de t que de r .



42. Halla todos los puntos que equidisten de A y de B y que disten 2 cm de C .



Para ello calculamos la mediatriz del segmento \overline{AB} y buscamos los 2 puntos que, además, distan 2 cm de C , es decir, que cortarían a la circunferencia de centro C y radio 2 cm.



43. Calcula la suma de los ángulos interiores de un:

a) Heptágono

$$a) S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot 5 = 900^\circ$$

b) Un polígono de 15 lados

$$b) S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot 13 = 2340^\circ$$

44. Calcula el número de lados de un polígono sabiendo que la suma de sus ángulos es:

a) 1980°

$$a) S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow n = \frac{1980}{180} + 2 = 13 \text{ lados}$$

b) 3420°

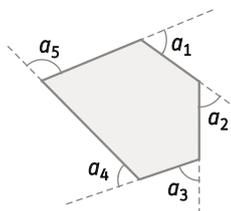
$$b) S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow n = \frac{3420}{180} + 2 = 21 \text{ lados}$$

45. Un octógono tiene tres ángulos rectos y otros tres de 120°. Los otros dos ángulos son iguales ¿Cuánto mide cada uno?

$$S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot (8-2) = 1080^\circ$$

$$\text{Como en total tienen que sumar } 1080^\circ: 1080^\circ = 90 \cdot 2 + 120 \cdot 3 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1080 - 180 - 360}{2} \Rightarrow \alpha = 225^\circ$$

46. Calcula la suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ en la figura:



La suma de los ángulos interiores del polígono mide: $S = 180 \cdot (n-2) \Rightarrow S = 180 \cdot (5-2) = 540^\circ$

Y cada ángulo α_i es el suplementario del ángulo interior. Si llamamos β_i a cada ángulo interior correspondiente a α_i :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (180 - \beta_1) + (180 - \beta_2) + (180 - \beta_3) + (180 - \beta_4) + (180 - \beta_5) = 180 \cdot 5 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) = 180 \cdot 5 - 180 \cdot 3 = 180 \cdot 2 = 360^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 360^\circ$$

47. Actividad resuelta

48. Dos lados de un triángulo miden 18 y 11 cm. Si el tercer lado es un número natural, ¿qué valores podría tomar?

Se tiene que cumplir que la suma de los dos lados más pequeños sea mayor que el tercer lado.

Si los dos lados que nos dan son los más pequeños, el tercero puede ser cualquier número natural entre 18 y 28.

Si 18 es el lado mayor, $11+x > 18$ y además $x < 18$. Así, el tercer lado puede valer 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

49. ¿Para qué valores de a los siguientes segmentos forman triángulo?

a) $x = 20$ $y = a$ $z = 15$

b) $x = a$ $y = a + 1$ $z = 12$

c) $x = a$ $y = a^2$ $z = 12$

a) Se tiene que cumplir que la suma de los dos lados más pequeños sea mayor que el lado mayor. En este caso, se tiene que cumplir que $20 + 15 > a$ o que $15 + a > 20$. Así, $a > 5$ y $a < 35$.

b) Siempre se cumple que $a + 12 > a + 1$, por lo que buscamos que $a + a + 1 > 12$. Es decir, $a > 5,5$.

c) Siempre se va a cumplir que $a^2 > a$, por lo que miramos que $a + 12 > a^2$ o que $a + a^2 > 12$.

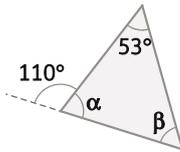
En el primer caso, resolviendo la inecuación queda: $a^2 - a - 12 < 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{1+48}}{2} = 4 \Rightarrow a < 4$.

En el segundo caso, resolviendo la inecuación queda: $a^2 - a - 12 > 0 \Rightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{1+48}}{2} = 3 \Rightarrow a > 3$.

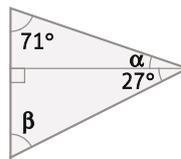
Es decir, a es mayor que 3 y menor que 4.

50. Calcula los ángulos desconocidos de los polígonos:

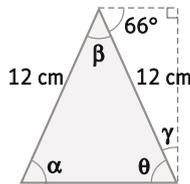
a)



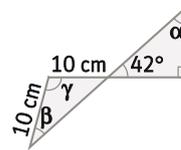
c)



b)



d)



a) $\alpha = 70^\circ$

$\beta = 180 - 70 - 53 = 57^\circ$

b) $\gamma = 180 - 90 - 66 = 24^\circ$

$\theta = 90 - 24 = 66^\circ \quad \alpha = \theta = 66^\circ$

$\beta = 180 - 66 \cdot 2 = 48^\circ$

c) $\beta = 180 - 90 - 27 = 63^\circ$

$\alpha = 180 - 71 - 63 - 27 = 19^\circ$

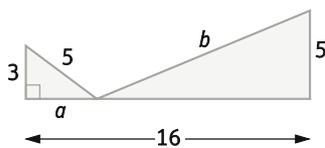
d) $\alpha = 180 - 90 - 42 = 48^\circ$

$\beta = 42^\circ$

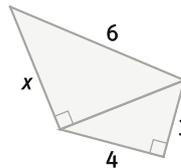
$\gamma = 180 - 42 \cdot 2 = 96^\circ$

51. Calcula la medida de los lados desconocidos en las siguientes figuras:

a)



b)



a) $3^2 + a^2 = 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{25 - 9} = 4$

$b^2 = 5^2 + (16 - a)^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow b = 13$

b) $l^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow l = 5$

$x = \sqrt{6^2 - 5^2} \Rightarrow x = \sqrt{11}$

52. Dado un triángulo cuyos lados miden 4,5; 2,8 y 5,3 cm respectivamente, decide de qué tipo es este triángulo con la ayuda del teorema de Pitágoras.

Usamos el Teorema de Pitágoras para ver si se cumple la igualdad $4,5^2 + 2,8^2 = 5,3^2$.

Como $28,09 = 28,09$ se trata de un triángulo rectángulo.

53. Actividad resuelta

54. Calcula el valor de x para que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

a) $AB = 8x - 1 \quad AC = 4x \quad BC = 17$

b) $AB = x + 1 \quad AC = 3x \quad BC = 4x - 3$

a) $(8x - 1)^2 + (4x)^2 = 17^2 \Rightarrow 64x^2 - 16x + 1 + 16x^2 = 289 \Rightarrow 80x^2 - 16x - 288 = 0 \Rightarrow 5x^2 - x - 18 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y nos quedamos solo con la solución positiva: $x = 2$

Por tanto, $AB = 15$ y $AC = 8$

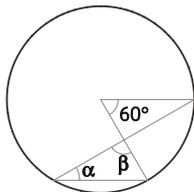
b) $(x + 1)^2 + (3x)^2 = (4x - 3)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 9x^2 = 16x^2 - 24x + 9 \Rightarrow 6x^2 - 26x + 8 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y nos quedamos con la solución positiva: $x = 4$

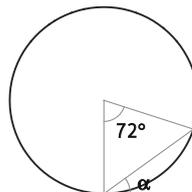
Por tanto, $AB = 5$, $AC = 12$ y $BC = 13$

55. Calcula la medida de los ángulos desconocidos en las siguientes figuras:

a)



b)

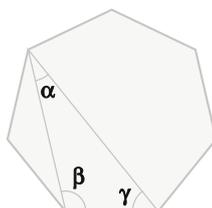


a) Todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son iguales, ya que les corresponde el mismo ángulo central y miden la mitad del central. Por tanto, $\alpha = 30^\circ$.

El otro ángulo inscrito del dibujo también es α porque comparte un lado con él y el otro es paralelo. Por tanto, el que falta es de 90° , que es igual que β por ser opuestos. Así, $\beta = 90^\circ$.

b) Por definición, $\alpha = \frac{72}{2} = 36^\circ$.

56. Calcula los ángulos que se indican en el siguiente heptágono regular.



Si inscribimos el heptágono en una circunferencia, el ángulo central correspondiente a cada lado mide $\frac{360^\circ}{7}$ y el ángulo inscrito correspondiente, mide la mitad. Por tanto, el ángulo α mide $\frac{180^\circ}{7} = 25,71^\circ$.

Como el ángulo γ abarca dos lados del heptágono, mide el doble que α : $\gamma = 2 \cdot 25,71^\circ = 51,42^\circ$.

El ángulo β abarca cuatro lados del heptágono, por lo que mide: $\beta = 4 \cdot 25,71^\circ = 102,84^\circ$.

57. Calcula el perímetro y el área del rectángulo si uno de sus lados mide 40 cm y sus diagonales miden 60 cm.

Calculamos primero la altura del rectángulo: $l = \sqrt{60^2 - 40^2} = \sqrt{2000} = 10\sqrt{20}$ cm

Perímetro: $P = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 10\sqrt{20} = 80 + 20\sqrt{20}$ cm

Área: $A = b \cdot h = 40 \cdot 10\sqrt{20} = 400\sqrt{20}$ cm²

58. Calcula el lado y el área de un polígono regular de 12 lados sabiendo que su radio es de 7,727 dm, y su apotema, de 7,464 dm.

$\frac{l}{2} = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{7,727^2 - 7,464^2} = \sqrt{3,995} = 1,998 \Rightarrow l = 3,997$ dm

$P = 3,997 \cdot 12 = 47,97$ dm

$A = \frac{P \cdot a}{2} = 179,03$ dm²

59. Calcula la apotema y el área de un polígono regular de 15 lados si su radio mide 12,024 m, y su lado, 5 m.

$12,024^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = a^2 + 2,5^2 \Rightarrow a = \sqrt{138,327} = 11,76$ dm

Perímetro: $P = 5 \cdot 15 = 75$ m

Área: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{75 \cdot 11,76}{2} = 441,05$ m²

- 60. Calcula el área del segmento circular de amplitud 60° y de radio 2 cm.**

El área del sector circular es:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 4}{360} \cdot 60 = \frac{2\pi}{3} = 2,09 \text{ cm}^2$$

Ahora calculamos el área del triángulo equilátero que sobra, sabiendo que la base son 2 cm y calculando la altura por Pitágoras.

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Área triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

El área pedida es la resta:

$$A = 2,09 - \sqrt{3} = 0,36 \text{ cm}^2$$

- 61. Halla el área de un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son tres números naturales consecutivos.**

Sean los lado a , $a + 1$ y $a + 2$.

Como se trata de un triángulo rectángulo puedo aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2 \Rightarrow a^2 + a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4a + 4 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y quedándonos solo con la solución positiva tenemos que $a = 3$.

Por tanto, los lados del triángulo son 3, 4 y 5.

- 62. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles inscrito en un cuadrado de lado 10 cm, si el lado desigual del triángulo coincide con uno de los lados del cuadrado y el vértice opuesto a dicho lado está situado en el punto medio del lado del cuadrado.**

Lado del triángulo isósceles:

$$l = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \text{ cm}$$

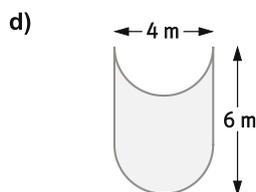
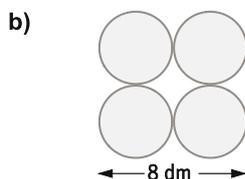
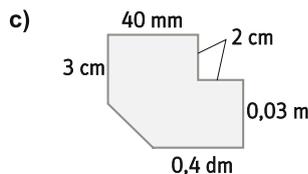
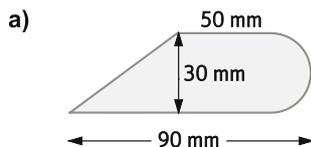
Perímetro del triángulo:

$$P = 10 + 11,18 \cdot 2 = 32,36 \text{ cm}$$

Área triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

63. Calcula el perímetro y el área de las siguientes zonas sombreadas:



a) Dividimos la figura en un triángulo, un rectángulo y un semicírculo.

$$\text{Área: } A = \frac{25 \cdot 30}{2} + 30 \cdot 50 + \frac{\pi \cdot 15^2}{2} = 375 + 1500 + 353,43 = 2228,43 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro: } P = \sqrt{30^2 + 25^2} + 25 + 50 \cdot 2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 15}{2} = 211,17 \text{ cm}$$

b) El área es la suma del área de los cuatro círculos y el perímetro la suma de la longitud de las circunferencias. Las circunferencias tienen un radio de 2 dm.

$$\text{Área: } A = 4 \cdot (\pi \cdot 2^2) = 16\pi = 50,27 \text{ dm}^2$$

$$\text{Perímetro: } P = 4 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) = 16\pi = 50,27 \text{ dm}$$

c) Podemos considerar la figura como un rectángulo al que le faltan un triángulo rectángulo de lado 2 cm y un cuadrado de lado 2 cm. Además vamos a trabajar en cm para que sea más fácil operar.

$$\text{Área: } A = A_R - A_T - A_C = 6 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 2}{2} - 2^2 = 30 - 2 - 4 = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro: } P = 3 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4 + \sqrt{2^2 + 2^2} = 20,83 \text{ cm}$$

d) Podemos considerar la figura como un cuadrado de lado 4 m para calcular el área, ya que el semicírculo que falta por un lado sería el que sobresale por el otro. Para el perímetro podemos considerar la longitud de la circunferencia entera y dos de los lados del cuadrado.

$$\text{Área: } A = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro: } P = 4 + 4 + 2 \cdot \pi \cdot r = 4 + 4 + 4\pi = 20,57 \text{ m}$$

64. Se considera un trapecio $ABCD$, donde AD es la base menor y BC es la base mayor. Si h es la altura del trapecio, calcula en función de las bases y de h , las áreas de los triángulos ABD y BDC .

Sea B la base mayor del trapecio y b la menor.

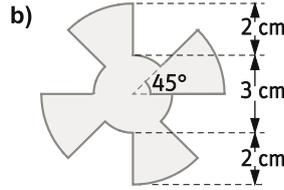
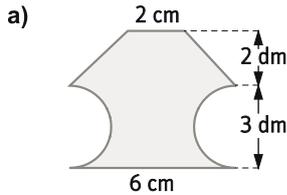
Área triángulo BDC :

$$A_{BDC} = \frac{B \cdot h}{2}$$

Área triángulo ABD :

$$A_{ABD} = \frac{B+b}{2}h - \frac{B \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} - \frac{B \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

65. Calcula el perímetro y el área de las siguientes zonas sombreadas:



a) Perímetro: $P = 2 + 2 \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} + 2 \cdot \pi \cdot 1,5 + 6 = 23,08 \text{ cm}$

Área: $A = A_{\text{Trapezio}} + A_{\text{Rectángulo}} - A_{\text{Círculo}} = \frac{(6+2) \cdot 2}{2} + 6 \cdot 3 - \pi \cdot 1,5^2 = 18,93 \text{ cm}^2$

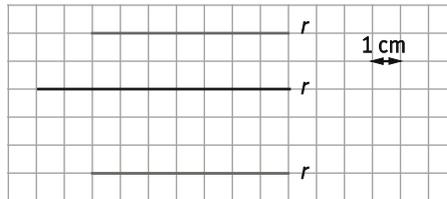
b) Podemos considerar la figura como cuatro sectores circulares de un círculo de radio 3,5 cm y otros cuatro sectores de un círculo de radio 1,5 cm.

Perímetro: $P = 4 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 3,5}{360} \cdot 45 \right) + 4 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 1,5}{360} \cdot 45 \right) + 8 \cdot 2 = 31,71 \text{ m}$

Área: $A = 4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 3,5^2}{360} \cdot 45 \right) + 4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1,5^2}{360} \cdot 45 \right) = 22,78 \text{ cm}^2$

66. Dos rectas paralelas r y s están separadas 5 cm. Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 2 cm de r y 3 cm de s .

Es la recta t paralela a r y s que se encuentra entre ambas a una distancia de r de 2 cm y a una distancia de 3 cm de s .



67. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos circunferencias concéntricas de 4 y 6 cm de radio?

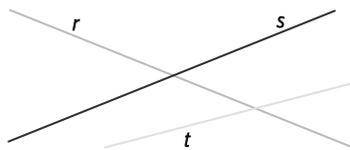
Es la circunferencia concéntrica a las dos anteriores y de radio 5 cm.

68. Dos puntos A y B distan 6 cm. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que forman con A y B un triángulo de 24 cm^2 de superficie?

$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 24 = \frac{6 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$

La altura de los triángulos debe ser de 8 cm para que se cumplan las condiciones pedidas. Así, las dos rectas paralelas al segmento AB separadas y separadas de este 8 cm verifican la condición.

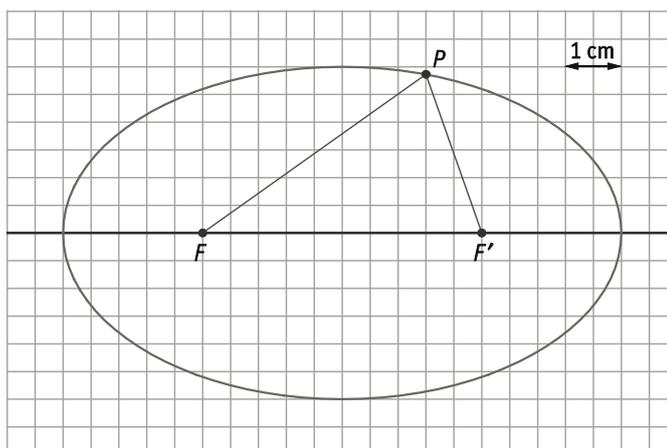
69. Indica cuáles son los puntos del plano que equidistan de las tres rectas r , s y t de la figura.



Serán los centros de las circunferencias tangentes a las 3 rectas a la vez. Además las dos circunferencias que cumplen esta condición, son tangentes entre sí en el mismo punto que lo son con la recta r .

70. Actividad resuelta

71. Dibuja una elipse tal que la distancia entre sus focos sea 5 cm y cuya suma de distancias desde cualquier punto de la curva a los focos sea 10 cm.



72. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) La suma de los ángulos interiores de un polígono puede ser 520°.
 - b) Las diagonales de un rectángulo son siempre perpendiculares.
 - c) Dos lados de un triángulo isósceles miden 12 y 5 cm. El tercer lado puede valer 12 cm ó 5 cm.
 - d) En todos los triángulos isósceles el baricentro coincide con el ortocentro.
 - e) Un cuadrilátero tiene sus cuatro lados iguales. Con seguridad, es un paralelogramo.
- a) Verdadera, si el polígono es cóncavo. Si el polígono es convexo debe ser múltiplo de 180°.
 - b) Falsa, solo en el caso del cuadrado.
 - c) Falsa. Puede valer 12 cm pero no 5 cm.
 - d) Falsa
 - e) Verdadera

73. La mediana de un triángulo cualquiera divide a este en dos nuevos triángulos. ¿Cuál es la diferencia entre sus áreas?

Se obtienen dos triángulos de la misma altura que el inicial pero con la base de la mitad de longitud. Por eso tenemos dos triángulos de igual área entre sí y de la mitad del área del triángulo inicial.

74. ¿Qué condición debe cumplir una elipse para coincidir con una circunferencia?

Se debe cumplir que los dos focos sean el mismo punto, que será el centro de la circunferencia.

75. Calcula los ángulos de un pentágono, si verifican que, ordenados de menor a mayor, cada uno de ellos mide 25° más que el siguiente.

Los ángulos formados entre dos vértices consecutivos del polígono suman 540°.

$$540 = x + (x + 25) + (x + 50) + (x + 75) + (x + 100) = 5x + 250 \Rightarrow x = \frac{540 - 250}{5} = 58^\circ$$

Por tanto los ángulos son: 58°, 83°, 108°, 133° y 158°.

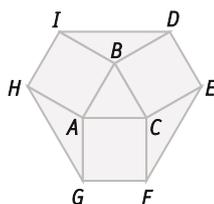
76. Desde un punto exterior a una circunferencia se traza una tangente a la misma. La distancia del punto al punto de contacto con la circunferencia es 21 cm y la distancia entre el punto y el centro de la circunferencia es 29 cm. Calcula el área de la circunferencia.

Se forma un triángulo rectángulo entre el punto P de contacto entre la recta tangente y la circunferencia, el punto Q a 21 cm del punto P y el centro de la circunferencia. Así podemos calcular el radio de la circunferencia y con ello el área.

Radio de la circunferencia: $r = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ cm

Área del círculo: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 400 = 1256,64$ cm²

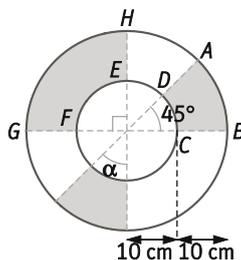
77. Sobre los lados del triángulo equilátero ABC de lado 5 cm, se construyen tres cuadrados $ACFG$, $BDEC$ y $HIBA$ y se trazan los segmentos ID , EF y GH para obtener el hexágono $HIDEFG$. Calcula los ángulos del hexágono.



Cada triángulo isósceles (AHG , CEF , IBD) tiene un ángulo de 120° y dos ángulos de 30° . Por otro lado, el ángulo del hexágono es el del triángulo isósceles y el del cuadrado.

Así, cada ángulo del hexágono mide $90 + 30 = 120^\circ$.

78. En la siguiente figura:



- ¿Por qué el ángulo α mide 45° ?
- Calcula las longitudes de los arcos AB y EF y comprueba que son proporcionales a los radios de sus correspondientes circunferencias.
- Calcula el área limitada por los arcos AB y DC y los segmentos AD y BC .
- Si se quiere crear un logotipo con esta forma, ¿cuánta pintura gris será necesaria si cada cm² de área requiere 0,25 cm³ de pintura?

a) Sabemos que el ángulo correspondiente al arco ED es de 45° , porque son $90^\circ - 45^\circ$. El ángulo α es el opuesto a este y por tanto mide lo mismo.

b)
$$l_{AB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 45}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 45}{360} = 5\pi$$
 cm
$$l_{EF} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 90}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 90}{360} = 5\pi$$
 cm

Son proporcionales a los radios ya que la longitud del arco es la misma. A un ángulo del doble le corresponde un radio de la mitad. Así, si el ángulo fuera el mismo, la longitud del arco de la circunferencia pequeña sería la mitad.

c)
$$A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot 45}{360} = \frac{\pi \cdot (20^2 - 10^2) \cdot 45}{360} = \frac{300\pi \cdot 45}{360} = \frac{75\pi}{2} = 117,81$$
 cm²

- d) El área pintada de gris es 4 veces el área calculada en el apartado anterior:

$$A_{gris} = 4 \cdot 117,81 = 471,24$$
 cm²

Pintura necesaria: $471,24 \cdot 0,25 = 117,81$ cm³

79. Un triángulo rectángulo verifica que uno de sus catetos mide la mitad que la hipotenusa. Demuestra que el triángulo tiene un ángulo de 30°.

Sea el triángulo ABC donde el segmento BC es la hipotenusa y A el vértice del ángulo de 90°. Inscribimos el triángulo en una circunferencia. Así BC es el diámetro de la circunferencia.

El triángulo OAB es equilátero, porque un lado es el radio, otro es el que mide la mitad de la hipotenusa y el tercer lado sale de la unión del centro de la circunferencia con el vértice en A , y por tanto también es un radio. Entonces todos sus ángulos miden 60°, en concreto el que pertenece al triángulo inicial.

Por tanto el triángulo tiene un lado de 90° (por ser rectángulo), otro de 60° y el tercero ha de medir 30° para que sumen 180°.

80. Un pentágono tiene dos ángulos rectos. Los ángulos contiguos a los rectos son iguales. Por otra parte, todos los lados miden 5 cm.

a) ¿Se trata de un pentágono regular?

b) ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

c) Calcula el perímetro y el área del pentágono.

a) No es un pentágono regular porque no tiene todos los ángulos iguales. Sería necesario que todos midieran 108°.

b) $S = 180 \cdot (n - 2) = 180 \cdot 3 = 540^\circ$

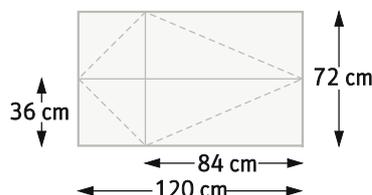
$$S = 540 = 90 + 90 + 2\alpha + \beta \Rightarrow 360 = 2\alpha + \beta$$

Además la figura se puede descomponer en un cuadrado de lado 5 cm y un triángulo equilátero, también de lado 5 cm. En ese caso, $\beta = 60^\circ$ y $\alpha = 90 + 60 = 150^\circ$.

c) $P = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}$

$$A = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{triángulo}} = 5^2 + \frac{5 \cdot \sqrt{5^2 - 2,5^2}}{2} = 25 + \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 35,83 \text{ cm}^2$$

81. Para construir una cometa, se recorta la cartulina de la figura por las líneas de puntos.



Calcula el área de la cometa.

Calculamos el área de los triángulos de altura 84 cm y los de altura la diferencia hasta 120 cm. El área total será la suma de estos triángulos, dos veces cada uno de ellos.

Triángulos grandes:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{36 \cdot 84}{2} = 1512 \text{ cm}^2$$

Triángulos pequeños:

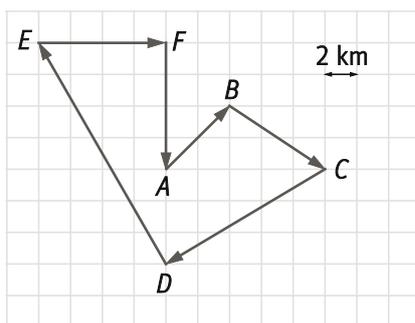
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{36 \cdot (120 - 84)}{2} = 648 \text{ cm}^2$$

Área de la cometa:

$$A = 2 \cdot 1512 + 2 \cdot 648 = 4320 \text{ cm}^2$$

82. Actividad resuelta

83. Miriam está estudiando un proyecto de red de fibra óptica en una determinada zona. El siguiente esquema representa la red:



- a) Calcula la longitud total de la red.
 b) ¿Cuánto costará el total del cable que se precisa si cada metro vale 7 €?

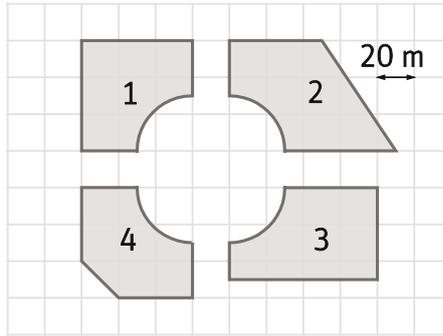
a) $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA} = \sqrt{4^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 10^2} + \sqrt{8^2 + 14^2} + 8 + 8 = 56,65 \text{ km}$
 b) Precio: $56,65 \cdot 7 = 396,58 \text{ €}$

84. Los ayuntamientos de las tres localidades que aparecen en la figura, A, B y C, quieren construir una piscina pública que equidiste de los tres pueblos.



- a) ¿Dónde deberán construirla?
 b) ¿Cuál sería la ubicación adecuada si debe equidistar de A y de B y distar 5000 m de C?
 a) Deberían construirla en la intersección de las mediatrices de los segmentos que unen dos de los pueblos. Sería el centro de la circunferencia que pasa por los tres pueblos.
 b) Si equidista de A y de B estará en la mediatriz del segmento AB. Si, además, dista 5000m de C estará en el punto que corta la mediatriz de AB con la circunferencia de centro C y radio 5000 m.

85. Amalia quiere comprar una parcela en una nueva urbanización. Tiene la posibilidad de comprar una de las cuatro que aparecen en la figura, con un precio de 15 euros el metro cuadrado.



Ordena de menor a mayor las parcelas según su área y calcula el precio de cada una de ellas.

Parcela 1:

Calculamos el área del cuadrado de lado 60 m y le quitamos el área del cuarto de círculo de radio r.

$$r = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800}$$

$$A = 60^2 - \pi \cdot r^2 = 3600 - 800\pi = 1086,72 \text{ m}^2$$

Parcela 2:

Calculamos el área como el área del rectángulo menos el del cuarto de círculo de radio el mismo que el de la parcela anterior menos el área del triángulo rectángulo.

$$A = 60 \cdot 90 - 800\pi - \frac{60 \cdot 40}{2} = 5400 - 800\pi - 1200 = 4200 - 800\pi = 1686,72 \text{ m}^2$$

Parcela 3:

Calculamos el área como el área del cuadrado de lado 60 m menos el del cuarto de círculo de radio el mismo que el de las parcelas anteriores y menos la del triángulo rectángulo (esquina).

$$A = 60^2 - 800\pi - \frac{20 \cdot 20}{2} = 3600 - 800\pi - 200 = 886,72 \text{ m}^2$$

Parcela 4:

Calculamos el área del rectángulo y le restamos la del cuarto de círculo de radio el mismo que el de las parcelas anteriores.

$$A = 50 \cdot 80 - 800\pi = 4000 - 800\pi = 1486,72 \text{ m}^2$$

Parcela 3 < Parcela 1 < Parcela 4 < Parcela 2

Precios:

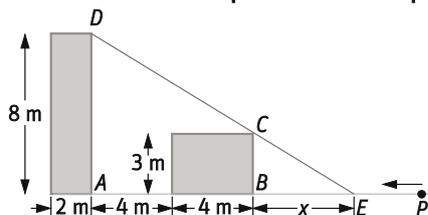
$$P_1 = 1086,72 \cdot 15 = 16300,80 \text{ €}$$

$$P_2 = 1686,72 \cdot 15 = 25300,80 \text{ €}$$

$$P_3 = 886,72 \cdot 15 = 13300,80 \text{ €}$$

$$P_4 = 1486,72 \cdot 15 = 22300,80 \text{ €}$$

86. En la figura aparecen dos edificios. Marta se encuentra en el punto D , desde ahí observa que Pablo, que se encuentra en el punto P , se acerca andando. Para saber a qué distancia del punto B , Marta dejará de ver a Pablo:



- a) Calcula las áreas de los triángulos ADE y BCE y la del trapecio $ABCD$.
 b) Relaciona las áreas anteriores para calcular el valor de x .

a) Área triángulos: $A_{ADE} = \frac{(4 + 4 + x) \cdot 8}{2} = \frac{(8 + x) \cdot 8}{2} = 4 \cdot (8 + x) \text{ m}^2$

Área triángulo: $A_{BCE} = \frac{x \cdot 3}{2} = \frac{3x}{2} \text{ m}^2$

Área trapecio: $A_{ABCD} = \frac{(8 + 3) \cdot 8}{2} = 44 \text{ m}^2$

b) $A_{ABCD} + A_{BCE} = A_{ADE} \Rightarrow 44 + \frac{3x}{2} = 32 + 4x \Rightarrow 12 = 4x - \frac{3x}{2} \Rightarrow 12 = \frac{5x}{2} \Rightarrow x = \frac{24}{5} \Rightarrow x = 4,8 \text{ m}$

87. Se considera un polígono regular de n lados. Los vértices consecutivos se nombran con $(1), (2), (3), \dots, (n)$. El ángulo que forma la diagonal determinada por (1) y (4) con el lado determinado por (1) y (2) es de 20° . ¿Cuántos lados tiene el polígono?

- A. 12 B. 15 C. 18 D. 20

Como es un polígono regular se puede inscribir en una circunferencia. El ángulo descrito en el enunciado es la mitad de su correspondiente central. Por tanto, el ángulo central mide 40° y abarca del lado (2) al (4) , 2 lados.

El ángulo central formado por dos lados consecutivos abarca un arco de 20° . Como en total son 360° , si cada lado corresponde a un arco de 20° , en total hay 18 lados.

La respuesta correcta es C. 18.

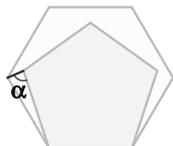
88. La medida de un arco de amplitud 120° es 5 cm mayor que su radio. ¿Cuánto mide el radio?

- A. $\frac{20}{2\pi - 3}$ B. $\frac{15}{2\pi - 3}$ C. $\frac{30}{\pi - 6}$ D. $\frac{20}{\pi - 6}$

$l_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 120}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{3} = r + 5 \Rightarrow 2\pi r = 3r + 15 \Rightarrow r = \frac{15}{2\pi - 3}$

La respuesta correcta es B. $\frac{15}{2\pi - 3}$.

89. ¿Cuánto vale el ángulo α ?



- A. 60° B. 70° C. 74° D. 84°

Cada ángulo interior del pentágono mide $\frac{S}{5} = \frac{180 \cdot 3}{5} = 108^\circ$ y del hexágono $\frac{S}{6} = \frac{180 \cdot 4}{6} = 120^\circ$

Al tratarse de polígonos regulares, todos sus lados son iguales y, en este caso, el lado del pentágono es igual al del hexágono. Entonces, el triángulo es isósceles (tiene dos lados iguales) y el ángulo desigual mide $120 - 108 = 12^\circ$.

Así, cada ángulo mide $\frac{180 - 12}{2} = 84^\circ$.

La respuesta correcta es D. 84° .

90. En una corona circular, la longitud de la circunferencia exterior es 1 m más larga que la de la interior. ¿Cuánto vale la diferencia de los radios?

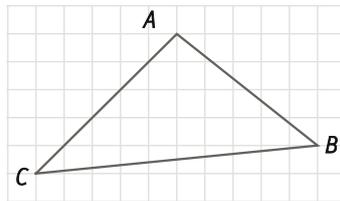
- A. $\frac{1}{2\pi}$ B. 2π C. $\frac{1}{\pi}$ D. $1 + 2\pi$

$$l - l' = 1 \Rightarrow 2\pi r - 2\pi r' = 1 \Rightarrow 2\pi(r - r') = 1 \Rightarrow r - r' = \frac{1}{2\pi}$$

La respuesta correcta es A. $\frac{1}{2\pi}$

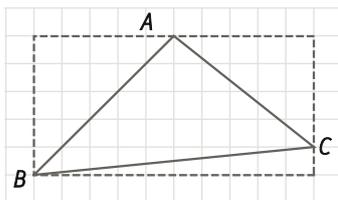
BUSCA LA SOLUCIÓN CORRECTA

91. Calcula el área del triángulo de la figura.



Posibles soluciones:

A. Se trata de un triángulo rectángulo de catetos AB y AC e hipotenusa BC.



Con la ayuda de la cuadrícula, se pueden calcular las medidas de los dos catetos:

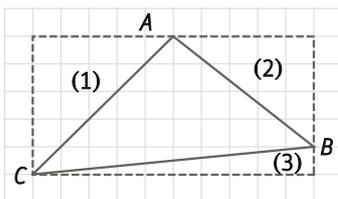
$$AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Para calcular el área, se puede tomar como base el cateto AB y como altura el cateto AC:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{41}}{2} = \frac{\sqrt{2050}}{2} u^2$$

B. Para calcular el área se pueden restar al del rectángulo la de los tres triángulos rectángulos (1), (2) y (3):



$$A = 10 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{5 \cdot 4}{2} - \frac{10 \cdot 1}{2} = 22,5 u^2$$

Pero $\frac{\sqrt{2050}}{2} \neq 22,5$, ¿cuál es la solución correcta? ¿Dónde se encuentra el error?

El error está en considerar que el triángulo es rectángulo, cuando no lo es. Si fuera así, se cumpliría

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\text{Pero } \sqrt{50}^2 + \sqrt{41}^2 = 91 \neq 10^2 + 1^2 = 101$$

La solución correcta es la B.

PONTE A PRUEBA

¿Pasará?

Actividad resuelta

El jardín Botánico

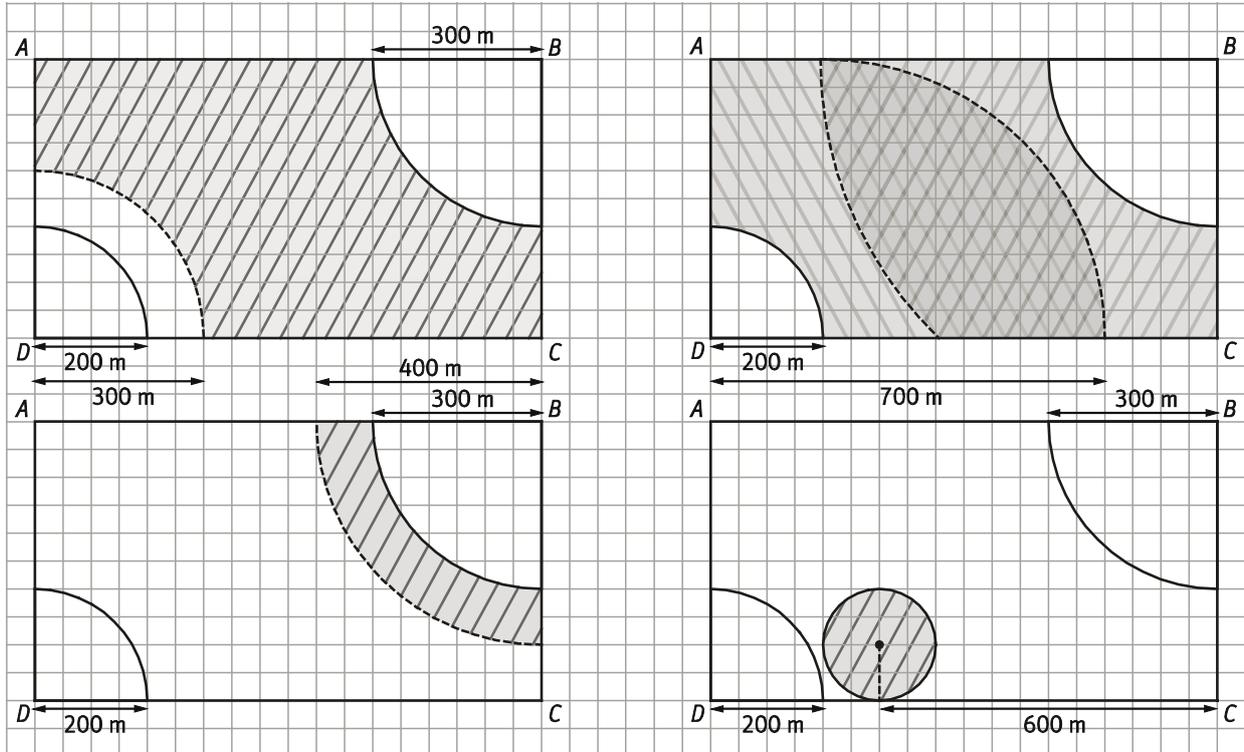
Un jardín botánico con forma de rectángulo $ABCD$ de medidas 500×900 m, tiene dos recintos con forma de sector circular de 90° de amplitud:

- Con centro D y radio 200 metros para las plantas de clima frío.
- Con centro B y radio 300 metros para las plantas autóctonas.



Se quiere construir un lago circular de radio 100 m para colocar las especies que más humedad precisan.

1. Indica gráficamente en tu cuaderno en qué zona podrá colocarse su centro si debe estar a más de 300 m de D .
2. Indica gráficamente en qué zona podrá colocarse su centro si debe estar a menos de 400 m de B .
3. Indica gráficamente en qué zona podrá colocarse su centro si debe estar a menos de 700 m de B y también a menos de 700 m de D .
4. Finalmente, se coloca de forma que es tangente al lado CD y cuyo punto de tangencia está a 600 m de C . Dibuja su situación en tu cuaderno.
5. Calcula el área del parque que no está ocupada ni por el recinto de plantas frías ni por el recinto de plantas autóctonas ni por el lago.



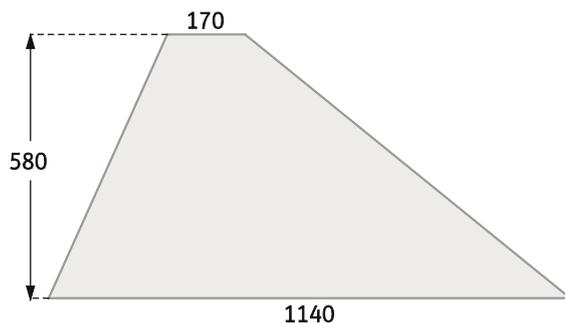
5. Área libre:

$$A = b \cdot h - \frac{1}{4} \pi r_1^2 - \frac{1}{4} \pi r_2^2 - \pi r_3^2 = 900 \cdot 500 - \frac{1}{4} \pi \cdot 200^2 - \frac{1}{4} \pi \cdot 300^2 - \pi \cdot 100^2 = 450\,000 - 10\,000\pi - \frac{90\,000}{4}\pi - 10\,000\pi$$

$$A = 450\,000 - \frac{90\,000 + 80\,000}{4}\pi = 450\,000 - 42\,500\pi \Rightarrow A = 316\,482 \text{ m}^2$$

El concierto de rock

En un concierto de rock se reservó para el público un terreno con la forma y dimensiones reflejadas en la figura.



Se considera que la ocupación es baja si cada persona ocupa de media $2,5 \text{ m}^2$, media si cada persona ocupa 1 m^2 y alta si cuatro personas ocupan 1 m^2 .

Si la asistencia al concierto fue media, ¿cuál es la mejor aproximación al total de asistentes?

- A. 6726 B. 3799 C. 1728 D. 134 E. 6202

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1140+170}{2} \cdot 580 \Rightarrow A = 379900 \text{ dm}^2$$

Como la ocupación fue media, cada persona ocupa 1 m^2 .

$$\text{Número de asistentes: } \frac{379900 \text{ dm}^2}{1 \text{ m}^2} = 3799 \text{ asistentes}$$

La respuesta correcta es B. 3779.

AUTOEVALUACIÓN

1. Para cada uno de los siguientes casos. comprueba si las tres longitudes dadas pueden formar o no triángulo y, en caso afirmativo, si es o no rectángulo:

- a) $a = 9 \text{ cm}$ $b = 40 \text{ cm}$ $c = 41 \text{ cm}$
- b) $a = 8 \text{ cm}$ $b = 17 \text{ cm}$ $c = 9 \text{ cm}$
- c) $a = 75 \text{ cm}$ $b = 85 \text{ cm}$ $c = 36 \text{ cm}$

- a) Para que sea triángulo, se tiene que cumplir que $a + b > c \Rightarrow 9 + 40 > 41 \Rightarrow$ Forman triángulo.
Para que sea rectángulo: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2 \Rightarrow$ Es triángulo rectángulo.
- b) Para que sea triángulo, se tiene que cumplir que $a + c > b \Rightarrow 8 + 9 = 17 \Rightarrow$ No forman triángulo.
- c) Para que sea triángulo se tiene que cumplir que $a + c > b \Rightarrow 75 + 36 > 85 \Rightarrow$ Forman triángulo.
Para que sea rectángulo: $a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow 75^2 + 36^2 = 5625 + 1296 = 6921 \neq 85^2 \Rightarrow$ El triángulo no es rectángulo.

2. Calcula los ángulos marcados en las siguientes figuras:



a) La figura está compuesta por un triángulo isósceles, uno rectángulo, que además es isósceles por tener dos lados que miden a , y otro triángulo es equilátero.

Los ángulos iguales del triángulo rectángulo miden 45° cada uno.

Los ángulos iguales del triángulo isósceles miden cada uno $180 - 60 - 45 = 75^\circ$. Por tanto, $\alpha = 30^\circ$.

b) Los ángulos del eneágono regular miden $S = 180 \cdot (9 - 2) = 180 \cdot 7 = 1260^\circ \Rightarrow \frac{1260}{9} = 140^\circ$.

Sabemos que la suma de los ángulos de los trapecios que se observan en la figura es 360° y que dos de los ángulos son los del eneágono, por tanto, miden 140° .

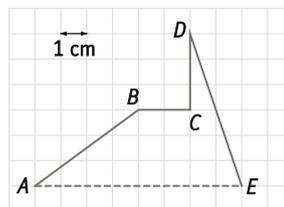
Los otros dos ángulos son $\frac{360 - (140 \cdot 2)}{2} = 40^\circ$.

$\delta = 140 - 40 = 100^\circ$ $\alpha = 140 - 40 - 40 = 60^\circ$

La suma de los ángulos del triángulo que se observa en la figura es 180° . Se trata de un triángulo isósceles y el ángulo diferente coincide con un vértice del eneágono. Los otros miden $180 = 140 + 2a \Rightarrow a = 20^\circ$.

$\gamma = 140 - 20 = 120^\circ$ $\beta = 140 - 20 - 40 = 80^\circ$

3. Se considera la figura:



- a) Calcula la longitud de la línea poligonal $ABCDE$.
- b) Calcula el área encerrada por la línea anterior y el segmento AE .

a) $l = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 + 3 + \sqrt{2^2 + 6^2} = 5 + 2 + 3 + 2\sqrt{10} \Rightarrow l = 16,32 \text{ cm}$

b) $A_{total} = A_{triángulo} + A_{trapecio} = \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{8 + 3}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} + \frac{33}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$

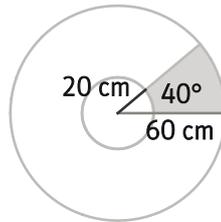
4. Un rombo está inscrito en un rectángulo de dimensiones 30×16 m. Calcula el perímetro y el área del rombo.

Lado del rombo: $l = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ m

Perímetro: $P = 17 \cdot 4 = 68$ m

Área: $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240$ m²

5. Calcula el perímetro y el área de la zona sombreada:



Perímetro:

$P = (60 - 20) \cdot 2 + l + l'$, siendo l y l' las longitudes de los arcos de circunferencias correspondientes a la pequeña y a la grande respectivamente.

$$l = \frac{2\pi r}{360} \cdot 40 = \frac{2\pi \cdot 20}{9} = \frac{40\pi}{9}$$

$$l' = \frac{2\pi r}{360} \cdot 40 = \frac{2\pi \cdot 60}{9} = \frac{40\pi}{3}$$

$$P = (60 - 20) \cdot 2 + \frac{40\pi}{9} + \frac{40\pi}{3} = 135,85 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot 40 = \frac{\pi \cdot (60^2 - 20^2)}{360} \cdot 40 = 1117,01 \text{ cm}^2$$

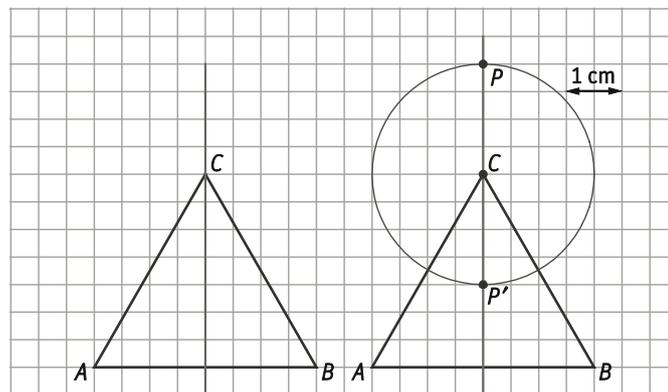
6. El lado de un pentágono regular mide 10 cm, y su radio, 8,507 cm. Calcula la apotema y el área del pentágono.

Apotema: $a = \sqrt{8,507^2 - 5^2} = \sqrt{47,37} = 6,88$ cm

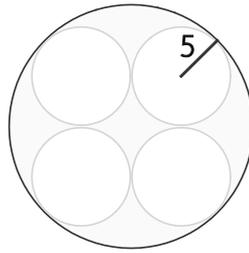
$$\text{Área: } A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 10) \cdot 6,88}{2} = 172,06 \text{ cm}^2$$

7. Se considera el triángulo equilátero ABC . ¿Cuántos puntos del plano equidistan de los vértices A y B y, a la vez, distan de C la mitad de la longitud del lado del triángulo? Hállalos.

Solo hay dos puntos que cumplan estas condiciones, que es la intersección de la mediatriz del segmento AB con la circunferencia de centro C y radio la mitad del lado del triángulo.



8. Se ha diseñado el siguiente logotipo para una nueva marca de automóviles.



- a) Calcula el lado y la diagonal del cuadrado formado por los centros de las circunferencias interiores.
 b) Calcula el diámetro de la circunferencia exterior.
 c) Calcula el área de la zona sombreada.

a) El lado del cuadrado mide el doble del radio, es decir, 10 cm y la diagonal $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,14$ cm.

b) El diámetro de la circunferencia exterior es la diagonal del cuadrado anterior más dos veces el radio de las circunferencias pequeñas.

$$D = 24,14 \text{ cm}$$

c) Área: $A_{\text{total}} = A_{\text{circunf. grande}} - 4 \cdot A_{\text{circunf. peq}} = \pi \cdot \left(\frac{24,14}{2}\right)^2 - 4 \cdot (\pi \cdot 5^2) = 145,68\pi - 25\pi = 143,51 \text{ cm}^2$