MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 7. Trigonometría

Unidad 7. Trigonometría

SOLUCIONES PÁG. 156

1 Indica cuántos grados equivalen a los siguientes radianes:

a. $\mathbf{\frac{2\pi}{5}}$ **rad**

$$\frac{2\pi}{5}\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 72^{\circ}$$

b. 3,5 rad

$$3{,}5\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 200{,}54^{\circ}$$

c. $\mathbf{\frac{2\pi}{3}}$ **rad**

$$\frac{2\pi}{3}\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 120^{\circ}$$

d. 1,5 rad

$$1{,}5\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 85{,}94^{\circ}$$

2 Expresa en radianes estos ángulos:

a. 20º

$$20^{\circ} \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{9}\ \text{rad}$$

b. 135º

$$135^{\circ} \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{3\pi}{4}\ \text{rad}$$

c. 210º

$$210^{\circ} \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{7\pi}{6}\ \text{rad}$$

d. 570º

$$570^{\circ} \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{19\pi}{6}\ \text{rad}$$

3 ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a un radián? ¿Cuántos radianes son un grado sexagesimal?

$\frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} \Rightarrow \frac{3{,}1416\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{1\ \text{rad}}{x} \Rightarrow x = 57{,}3^{\circ}$. Un radian equivale a 57,3º.

$\frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} \Rightarrow \frac{3{,}1416\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \frac{x\ \text{rad}}{1^{\circ}} \Rightarrow x = 0{,}02\ \text{rad}$. Un grado equivale a 0,02 rad.

4 ¿Qué es mayor: un grado sexagesimal o un radián?

$$\frac{3{,}1416 \text{ rad}}{180^{\circ}} = \frac{1 \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = 57{,}3^{\circ}$$

Un radian equivale a 57,3º, por lo tanto es mayor un radián que un grado sexagesimal.

5 Dos de los ángulos de un triángulo miden 60° y 0,2π rad, respectivamente. Halla el ángulo desconocido e indica la medida de los tres ángulos de este triángulo tanto en grados sexagesimales como en radianes.

$$0{,}2\pi \text{ rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi \text{ rad}} = 36^{\circ}$$

El tercer ángulo mide: 180º – (60º + 36º) = 84º

Los tres ángulos en grados sexagesimales miden 60º, 36º y 84º, y en radianes miden:

$$60^{\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

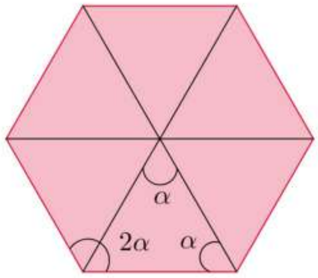
0,2π rad

$$84^{\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} = \frac{7\pi}{15} \text{ rad}$$

6 Investigad en Internet quién fue Hiparco de Nicea y haced una presentación en grupo sobre las aportaciones que realizó en el campo de la trigonometría.

Respuesta abierta.

7 Calcula el ángulo interior de un hexágono, en grados y en radianes.



En un hexágono regular, el ángulo central mide $\frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$. El ángulo interior mide el doble, 120º = $\frac{2\pi}{3}$ rad.

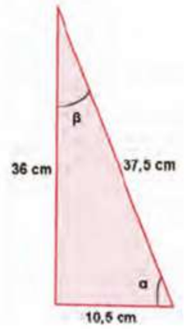
SOLUCIONES PÁG. 157

8 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos pertenecientes a los triángulos rectángulos de los que se conocen los siguientes datos:

a. Tiene un cateto contiguo de 10,5 cm y una hipotenusa de 37,5 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{37,5^2 - 10,5^2} \Rightarrow b = 36 \text{ cm}$$



Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{36}{37,5} = 0,96$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{10,5}{37,5} = 0,28$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{36}{10,5} = 3,43$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{37,5}{36} = 1,04$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{37,5}{10,5} = 3,57$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{10,5}{36} = 0,29$

b. Tiene un cateto contiguo de 4,5 cm y un cateto opuesto de 20 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{20^2 + 4,5^2} = 20,5 \Rightarrow a = 20,5 \text{ cm}$$

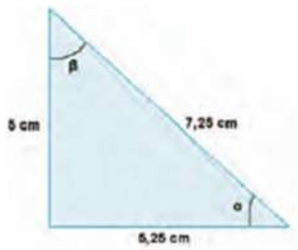
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{20}{20{,}5} = 0{,}98$
- $\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4{,}5}{20{,}5} = 0{,}22$
- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{20}{4{,}5} = 4{,}44$
- $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{20{,}5}{20} = 1{,}03$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{20{,}5}{4{,}5} = 4{,}56$
- $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4{,}5}{20} = 0{,}23$

c. Tiene un cateto opuesto de 5 cm y una hipotenusa de 7,25 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:

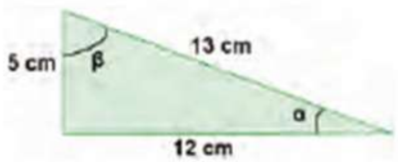
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{7{,}25^2 - 5^2} = \sqrt{27{,}56} \Rightarrow b = 5{,}25 \text{ cm}$



Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{5}{7{,}25} = 0{,}69$
- $\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5{,}25}{7{,}25} = 0{,}72$
- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{5}{5{,}25} = 0{,}95$
- $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{7{,}25}{5} = 1{,}45$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{7{,}25}{5{,}25} = 1{,}38$
- $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5{,}25}{5} = 1{,}05$

9 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm y cuya hipotenusa mide 13 cm.



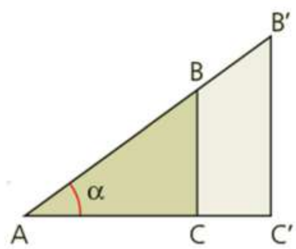
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{5}{13} = 0,38$
- $\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13} = 0,92$
- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{5}{12} = 0,42$
- $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13}{5} = 2,6$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{13}{12} = 1,08$
- $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{12}{5} = 2,4$

Para el ángulo β:

- $\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{12}{13} = 0,92$
- $\cos \beta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \beta = \frac{5}{13} = 0,38$
- $\text{tg } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{12}{5} = 2,4$
- $\text{cosec } \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13}{12} = 1,08$
- $\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} \Rightarrow \sec \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{13}{5} = 2,6$
- $\text{cotg } \beta = \frac{1}{\text{tg } \beta} \Rightarrow \text{cotg } \beta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{12} = 0,42$

10 Demuestra, a partir de la figura, que si se construyen otros triángulos semejantes al dado, se deduce que las razones trigonométricas de un ángulo son independientes de las longitudes de sus lados.



Al ser triángulos semejantes, se cumple que:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=r\Rightarrow\begin{cases}\overline{AB'}=r\cdot\overline{AB}\\ \overline{AC'}=r\cdot\overline{AC}\\ \overline{B'C'}=r\cdot\overline{BC}\end{cases}$$

$$\text{sen }\alpha=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}=\frac{\cancel{r}\cdot\overline{BC}}{\cancel{r}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}=\frac{\cancel{r}\cdot\overline{AC}}{\cancel{r}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

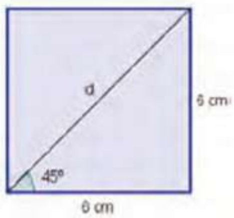
$$\text{tg }\alpha=\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}=\frac{\cancel{r}\cdot\overline{BC}}{\cancel{r}\cdot\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

SOLUCIONES PÁG. 159

11 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y en grupo, buscad alguna regla nemotécnica que os permita recordarla.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
45º	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	3	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$

12 Un cuadrado tiene 6 cm de lado. Halla la diagonal de dicho cuadrado aplicando las razones trigonométricas; mientras tanto, tu compañero lo averiguará con ayuda del teorema de Pitágoras. Finalmente, comprobad que los resultados coinciden.



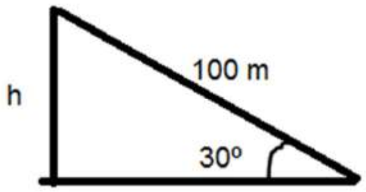
Aplicando las razones trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos 45º=\frac{6}{d}\end{array}\right\}\frac{6}{d}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow d=\frac{12}{\sqrt{2}}=8,49\text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

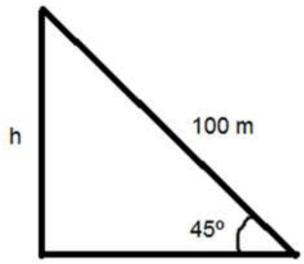
$$d^2=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=8,49\Rightarrow d=8,49\text{ cm}$$

13 Un globo aerostático está sujeto con una cuerda tensada de 100 m. ¿A qué altura del suelo se encontraría el globo si la cuerda formara un ángulo de 30° con la horizontal del suelo? ¿Y si el ángulo fuera de 45°? ¿Y de 60°?



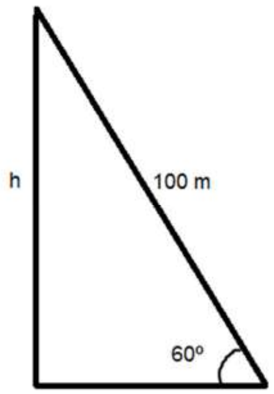
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 30º = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \cdot \text{sen } 30º = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

Si forma un ángulo de 30º estará a 50 m.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 45º = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \cdot \text{sen } 45º = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 70{,}71$$

Si forma un ángulo de 45º estará a 70,71 m.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 60º = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \cdot \text{sen } 60º = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 86{,}60$$

Si forma un ángulo de 60º estará a 86,60 m.

14 Halla el valor de las siguientes expresiones:

a. sen 60° + cos 45° + tg 30° + sec 45°

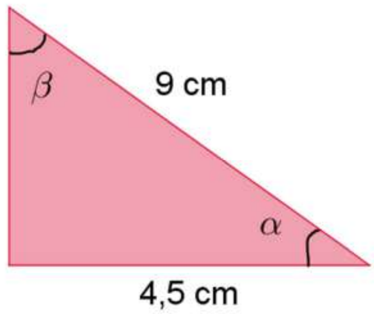
$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}=$$
$$=\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{6}$$

b. cos 45° · sen 30° + tg 30° · cotg 30°

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{3}=\frac{3\sqrt{2}+12}{12}=\frac{\cancel{3}\cdot(\sqrt{2}+4)}{\cancel{3}\cdot 4}=\frac{\sqrt{2}+4}{4}$$

15 Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,5 cm, y la hipotenusa, 9 cm.

a. ¿Cuánto miden los ángulos agudos de dicho triángulo?



$$\cos\alpha=\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4,5}{9}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{o}$$

β = 180º – 90º – 60º = 30º

b. Calcula el valor del otro cateto a partir de las razones trigonométricas del triángulo.

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\Rightarrow\text{sen}\,60^{o}=\frac{x}{9}\Rightarrow x=9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=7,79\text{ cm}$$

SOLUCIONES PÁG. 161

16 Indica los signos que tendrán las razones trigonométricas de los ángulos propuestos, señalando también en qué cuadrante se sitúan.

a. 198º
sen (–), cos (–), tg (+), 3.er cuadrante

b. $\frac{2\pi}{3}$ **rad**
sen (+), cos (–), tg (–), 2.º cuadrante

c. **45º**
sen (+), cos (+), tg (+), 1.er cuadrante

d. **294º**
sen (–), cos (+), tg (–), 4.º cuadrante

e. **95º**
sen (+), cos (–), tg (–), 2.º cuadrante

f. $\frac{\pi}{5}$ **rad**
sen (+), cos (+), tg (+), 1.er cuadrante

g. **5 rad**
sen (–), cos (+), tg (–), 4.º cuadrante

h. $\frac{5\pi}{4}$ **rad**
sen (–), cos (–), tg (+), 3.er cuadrante

17 Identifica en qué cuadrante se encuentra cada uno de estos ángulos:

a. **sen α = 0,8 y cos α = 0,6**
Seno y coseno positivos, está en el 1.er cuadrante.

b. **sen α = –0,91 y tg α = 2,14**
Seno negativo y tangente positiva, está en el 3.er cuadrante.

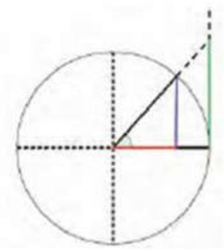
c. **cos α = –0,94 y tg α = 0,36**
Coseno negativo y tangente positiva, está en el 3.er cuadrante.

d. **sen α = –0,9 y tg α = –2,1**
Seno negativo y tangente negativa, está en el 4.º cuadrante.

18 Actividad resuelta.

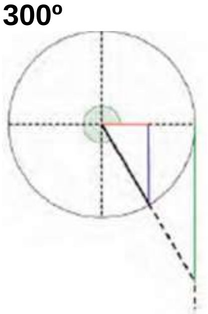
19 Representa gráficamente estos ángulos en un papel milimetrado y halla sus razones trigonométricas:

a. **48º**



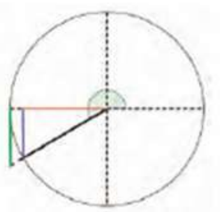
sen 48º = 0,74; cos 48º = 0,67; tg 48º = 1,1

b. 300º



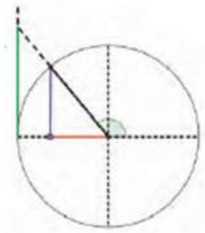
sen 300º = –0,87; cos 300º = 0,5; tg 300º = –1,73

c. 210º



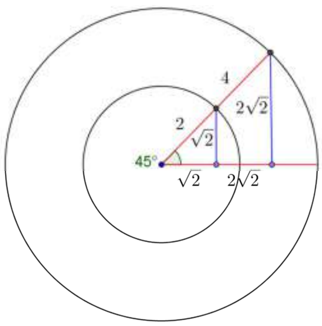
sen 210º = –0,5; cos 210º = –0,87; tg 210º = 0,58

d. 130º



sen 130º = 0,77; cos 130º = –0,64; tg 130º = –1,19

20 Construye dos circunferencias concéntricas, una de 2 cm de radio y otra de 5 cm de radio. Dibuja un ángulo de 40° en cada una de ellas y determina sus razones trigonométricas. ¿Qué es lo que ocurre? ¿Qué teorema explica esta situación?



$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } r = 2 \Rightarrow \text{sen } 45º = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Si } r = 4 \Rightarrow \text{sen } 45º = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \text{El seno tiene el mismo valor.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } r = 2 \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Si } r = 4 \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \text{El coseno tiene el mismo valor.}$$

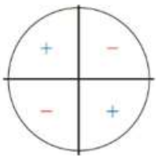
Sus razones trigonométricas son las mismas porque se corresponden con el mismo ángulo, al ser un ángulo agudo de dos triángulos rectángulos semejantes. Esta situación la explica el teorema de Tales.

21 ¿Por qué no existe la tangente de 90°? ¿Ocurre lo mismo en el caso del ángulo de 270°?

La tangente de un ángulo es por definición el cociente del cateto opuesto entre el cateto contiguo. Para el ángulo de 90º, tg 90º = $\frac{1}{0}$; como no es posible dividir entre 0, la tangente de 90º no existe. Del mismo modo ocurre con la tangente de 270º, ya que tg 270º = $\frac{-1}{0}$.

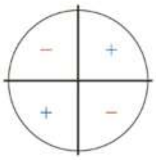
22 Los siguientes dibujos se corresponden con los signos de las razones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente, según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo. Identifica cada dibujo con su razón trigonométrica e indica el que no corresponde a ninguna de ellas.

a.



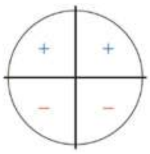
No se corresponde con ninguna razón trigonométrica porque el signo negativo del 1.er cuadrante no existe para ninguna razón trigonométrica.

b.



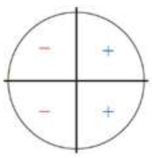
Se corresponde con la tangente.

c.



Se corresponde con el seno.

d.



Se corresponde con el coseno.

SOLUCIONES PÁG. 163

23 Calcula las razones trigonométricas que faltan en los siguientes ángulos, sabiendo que son menores de 90°:

a. sen α = 0,71

- $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + (0,71)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + 0,5041 = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,5041 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0,4959 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,4959} = 0,70$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,71}{0,70} = 1,01$

b. tg α = 2,52

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + (2,52)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 7,3504 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{7,3504}} = 0,37$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2,52 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{0,37} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 2,52 \cdot 0,37 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,93$

c. cos α = $\dfrac{2}{5}$

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 6,25 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \sqrt{5,25} = 2,29$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2,29 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\dfrac{2}{5}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{2}{5} \cdot 2,29 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,92$

d. cos α = $\dfrac{2}{3}$

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 2,25 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \sqrt{1,25} = 1,12$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} \Rightarrow 1,12 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{2}{3} \cdot 1,12 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,75$

e. sen α = 0,18

- $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + (0,18)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + 0,0324 = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,0324 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0,9676 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,9676} = 0,98$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,18}{0,98} = 0,18$

f. cos α = 0,2

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{(0,2)^2} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 25 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \sqrt{24} = 4,90$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 4,9 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{0,2} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,2 \cdot 4,9 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,98$

g. tg α = 0,61

- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+(0,61)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1,3721} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,7288} = 0,85$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 0,61 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{0,85} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,61 \cdot 0,85 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,52$

h. sen α = $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

- $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \dfrac{2}{25} = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{2}{25} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{23}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{23}{25}} = \dfrac{\sqrt{23}}{5} = 0,96$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{\frac{\sqrt{23}}{5}} = \dfrac{\sqrt{46}}{23} = 0,29$

i. tg α = $\sqrt{5}$

- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 6 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} = 0,41$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sqrt{5} = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\frac{\sqrt{6}}{6}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{6} = 0,91$

24 Calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo α, que cumple las siguientes condiciones:

Primero calculamos las razones trigonométricas sin tener en cuenta los signos, y luego indicamos los signos.

a. cotg α = $\dfrac{1}{2}$, con 180° < α < 270°

- $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 2$
- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+2^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 5 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\frac{\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen}\ \alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \text{tg}\ \alpha = 2$

b. sec α = $-\dfrac{5}{4}$, con 90° < α < 180°

- $\sec\alpha = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

- $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2}\Rightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{25}{16}\Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{25}{16}-1\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{3}{4}$
- $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \dfrac{3}{4}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{4}{5}}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}$

Como el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$

c. cosec α = $-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, con 270° < α < 360°

- $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$
- $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1\Rightarrow \cos^2\alpha+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^2=1\Rightarrow \cos^2\alpha+\dfrac{3}{25}=1\Rightarrow \cos^2\alpha=1-\dfrac{3}{25}\Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{22}{25}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\dfrac{22}{25}}=\dfrac{\sqrt{22}}{5}$
- $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{22}}=\dfrac{\sqrt{66}}{22}$

Como el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\operatorname{sen}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{22}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{66}}{22}$

d. cotg α = $\dfrac{4}{3}$, con 180° < α < 270°

- $\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$
- $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \dfrac{25}{16}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$
- $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \dfrac{3}{4}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{4}{5}}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}$

Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\operatorname{sen}\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$

e. cosec α = $\dfrac{7}{2}$, con 0° < α < 90°

- $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{7}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2}{7}$
- $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1\Rightarrow \cos^2\alpha+\left(\dfrac{2}{7}\right)^2=1\Rightarrow \cos^2\alpha+\dfrac{4}{49}=1\Rightarrow \cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{49}\Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{45}{49}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\dfrac{45}{49}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

Como el ángulo se encuentra en el primer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{2}{7}$, $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

f. sec α = $\frac{7}{3}$, con 270° < α < 360°

- $\sec\alpha = \dfrac{7}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{7}$
- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} \Rightarrow 1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{49}{9} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{\dfrac{40}{9}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{10}}{3} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\frac{3}{7}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\dfrac{3}{7} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

Como el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{7}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

g. cotg α = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, con 180° < α < 270°

- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{3}$
- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\left(\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 4 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$

h. cosec α = $\frac{5}{3}$, con 90° < α < 180°

- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$

- $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

- $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Como el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$

25 Estudia si existen ángulos menores de 90° que cumplan las siguientes condiciones y, si es así, calcula las razones que faltan:

a. Ángulo α cuyo coseno sea 0,3 y cuyo seno sea el doble que el coseno.

No es posible que exista un ángulo α cuyo coseno sea 0,3 y su seno sea el doble que el coseno:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 0{,}32 + 0{,}62 = 0{,}09 + 0{,}36 = 0{,}45 \neq 1$$

b. Ángulo α en el que el seno sea el doble que la tangente.

Supongamos que la tangente sea *x* y su seno sea, por tanto, 2*x,* entonces:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2x = \frac{x}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2x}{x}$

Aquí consideramos dos casos:

- Si $x \neq 0$, $\cos\alpha = \frac{2x}{x} = 2$ que es imposible, ya que el coseno es un número entre –1 y 1.
- Si $x = 0$, habría que encontrar un ángulo $\alpha < 90^\circ$ tal que sen α = 0, y tg α = 0, que es el ángulo α = 0º.

c. Ángulo α en el que la tangente sea 0,5 y el coseno sea el doble que el seno.

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 0{,}5^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como el coseno es el doble, el seno valdrá la mitad del coseno, por lo que

$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

Como se cumple la relación fundamental de la trigonometría, sí es cierto.

d. Ángulo α en el que el seno sea 0,48 y su coseno sea 0,95.

$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 0{,}95^2 + 0{,}48^2 = 0{,}9025 + 0{,}2304 \neq 1$

Con lo que no puede ser posible.

26 Aplicando las relaciones entre las razones trigonométricas, comprueba si las siguientes expresiones son o no ciertas:

a. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec^2}\ \alpha} = \mathbf{sen^2}\ \alpha \cdot \mathbf{cos^2}\ \alpha$

No es cierto, ya que $\dfrac{1}{\sec^2\alpha} = \cos^2\alpha \neq \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

b. tg α + cotg α = sec α · cosec α

Sí es cierto, ya que:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$$

c. cotg α · sec α = cosec α

Sí es cierto, ya que:

$$\operatorname{cotg}\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

d. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen^2}\ \alpha} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\ \alpha} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen^2}\ \alpha \cdot \mathbf{cos^2}\ \alpha}$

Sí es cierto, ya que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$

e. tg α · cosec α = sen α

Es cierto, ya que:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

f. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + cotg^2}\ \alpha} = \mathbf{cos^2}\ \alpha$

No es cierto, ya que:

$$\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \operatorname{sen}^2\alpha \neq \cos^2\alpha$$

g. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg^2}\ \alpha}} = \mathbf{sen^2}\ \alpha$

Sí es cierto, ya que

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \operatorname{sen}^2\alpha$$

SOLUCIONES PÁG. 165

27 Reduce al primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas:

a. sen 135º

sen 135º = sen (180º – 45º) = sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. tg 150º

tg 150º = tg (180º – 30º) = –tg 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. cos 315º

cos 315º = cos (–45º) = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. tg 300º

tg 300º = tg (–60º) = –tg 60º = $-\sqrt{3}$

e. cos225º

cos 225º = cos (180º + 45º) = –cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. sen 330º

sen 330º = sen (–30º) = –sen 30º = $-\frac{1}{2}$

g. cos 210º

cos 210º = cos (180º + 30º) = –sen 30º= $-\frac{1}{2}$

h. sen 120º

sen 120º = sen (180º – 60º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

i. tg 240º

tg 240º = tg (180º + 60º) = –tg 60º = $-\sqrt{3}$

28 Sabiendo que α es un ángulo del tercer cuadrante y que su coseno vale –0,8, indica el valor de las siguientes razones trigonométricas:

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + (0,8)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0,64 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - 0,64 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 0,36 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6$
- $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{0,6} = 1,33$

a. sen α

sen α = –0,6

b. tg α
tg α = 1,33

c. cos (180° – α)
cos (180º – α) = 0,8

d. cos (180° + α)
cos (180º + α) = 0,8

e. cos (–α)
cos (–α) = –0,8

f. tg (180° + α)
tg (180º + α) = 1,33

29 Si tg α = $\sqrt{15}$ y 0° < α < 90°, contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles son el seno y el coseno del ángulo α?

- $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\left(\sqrt{15}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 16=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{4}$
- $\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=1\Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha+\dfrac{1}{16}=1\Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha=1-\dfrac{1}{16}\Rightarrow$

  $\Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha=\dfrac{15}{16}\Rightarrow \mathrm{sen}\ \alpha=\sqrt{\dfrac{15}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

b. Halla las razones trigonométricas de su ángulo complementario, su ángulo suplementario y su ángulo opuesto.
Razones trigonométricas del ángulo complementario:

sen (90º – α) = cos α = $\dfrac{1}{4}$

cos (90º – α) = sen α = $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

tg (90º – α) = $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

Razones trigonométricas del ángulo suplementario:

sen (180º – α) = sen α = $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

cos (180º – α) = –cos α = $-\dfrac{1}{4}$

tg (180º – α) = –tg α = $-\sqrt{15}$

Razones trigonométricas del ángulo opuesto:

sen (–α) = –sen α = $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

cos (–α) = cos α = $\dfrac{1}{4}$

tg (–α) = –tg α = $-\sqrt{15}$

30 Si sen α = –0,2, ¿en qué cuadrante o cuadrantes se puede encontrar dicho ángulo α?

Si el seno es negativo puede encontrarse en el tercer o en el cuarto cuadrante.

31 Con respecto a la actividad anterior, considera tú uno de los cuadrantes posibles y tu compañero el otro y calculad las siguientes razones trigonométricas:

a. cos α

En el tercer cuadrante:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

En el cuarto cuadrante:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b. tg α

En el tercer cuadrante:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

En el cuarto cuadrante:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c. sen (180° – α)

En el tercer cuadrante:

sen (180° – α) = sen α = $-\frac{1}{5}$

En el cuarto cuadrante:

sen (180° – α) = sen α = $-\frac{1}{5}$

d. tg (180° + α)

En el tercer cuadrante:

$$\text{tg}\ (180^{\circ} + \alpha) = \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

En el cuarto cuadrante:

$$\text{tg }(180^\circ+\alpha)=\text{ tg }\alpha=\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}$$

e. sen (–α)

En el tercer cuadrante:

sen (–α) = –sen α = $\frac{1}{5}$

En el cuarto cuadrante:

sen (–α) = –sen α = $\frac{1}{5}$

f. cos (–α)

En el tercer cuadrante:

cos (–α) = cos α = $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

En el cuarto cuadrante:

cos (–α) = cos α = $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

32 Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, considerando que tg α = 2 y luego que tg α = 3, y teniendo en cuenta que α es un ángulo del primer cuadrante:

Si la tg α = 2:

$$1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 5=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \text{sen}^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1\Rightarrow \text{sen}^2\alpha+\frac{5}{25}=1\Rightarrow \text{sen}^2\alpha=1-\frac{5}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha=\frac{20}{25}\Rightarrow \text{sen }\alpha=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen }(180^\circ+\alpha)=-\text{sen }\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\,(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg }(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{\text{tg }\alpha}=\frac{1}{2}$$

sen (–α) = –sen α = $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

cos (90º – α) = sen α = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Si la tg $\alpha = 3$:

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+3^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{10}{100} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{10}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{90}{100} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{90}{100}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen}\ (180^\circ + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\ (180^\circ - \alpha) = -\cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg}\ (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

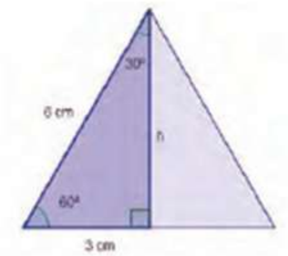
$$\cos\ (90^\circ - \alpha) = \text{sen}\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

	tg α = 2	**tg α = 3**
sen α	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$
cos α	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$
sen (180º + α)	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
cos (180º – α)	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{10}}{10}$
tg (90º – α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
sen (–α)	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
cos (90º – α)	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

SOLUCIONES PÁG. 167

33 Halla el área de los siguientes polígonos regulares, utilizando las razones trigonométricas:

a. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

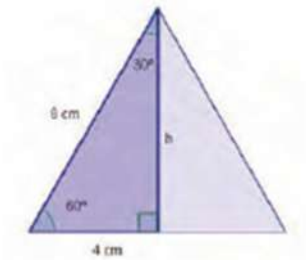


$$\left.\begin{array}{l}\cos 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^{\circ} = \dfrac{h}{6}\end{array}\right\} \dfrac{h}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} = 15{,}59 \Rightarrow A = 15{,}59 \text{ cm}^2$$

b. Un hexágono de 8 cm de lado.

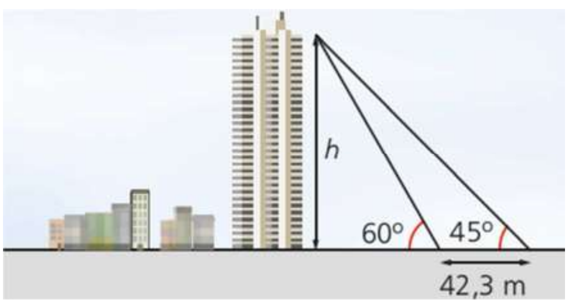
Un hexágono consta de 6 triángulos equiláteros:



$$\left.\begin{array}{l}\cos 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^{\circ} = \dfrac{h}{8}\end{array}\right\} \dfrac{h}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = 6 \cdot \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} = 166{,}28 \Rightarrow A = 166{,}28 \text{ cm}^2$$

34 Para calcular la altura de un edificio, se han tomado las siguientes medidas con un teodolito. Halla dicha altura.



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45^{o} = \dfrac{h}{x+42,3} \\ \text{tg } 60^{o} = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 = \dfrac{h}{x+42,3} \\ \sqrt{3} = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se deduce que: $h=\sqrt{3}x$, y sustituyendo en la primera ecuación:

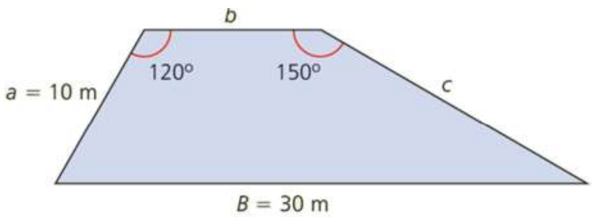
$$1 = \frac{h}{x+42,3} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{3}x}{x+42,3} \Rightarrow x+42,3=\sqrt{3}x \Rightarrow x\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=-42,3\Rightarrow$$

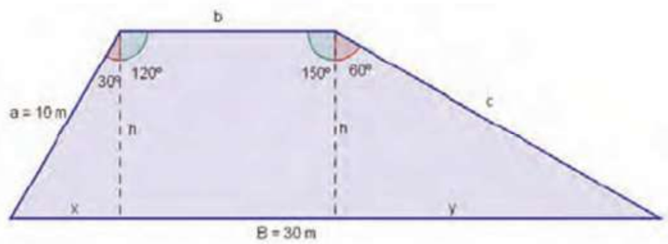
$$\Rightarrow x\cdot(1-1,73)=-42,3\Rightarrow -0,73x=-42,3\Rightarrow x=57,95 \text{ m}$$

La altura del edificio es:

$$h=\sqrt{3}x\Rightarrow h=1,73\cdot 57,95=100,25\Rightarrow h=100,25 \text{ m}$$

35 Determina el área y el perímetro de la siguiente figura, aplicando las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras:





$$\left.\begin{array}{l} \cos 30^{o}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^{o}=\dfrac{h}{10} \end{array}\right\} \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{10}\Rightarrow h=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\Rightarrow h=5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos 60^{o}=\dfrac{1}{2} \\ \cos 60^{o}=\dfrac{h}{c} \end{array}\right\} \frac{1}{2}=\frac{h}{c}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{c}\Rightarrow c=10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 30^{o}=\dfrac{1}{2} \\ \text{sen } 30^{o}=\dfrac{x}{10} \end{array}\right\} \frac{1}{2}=\frac{x}{10}\Rightarrow x=\frac{10}{2}=5\Rightarrow x=5 \text{ m}$$

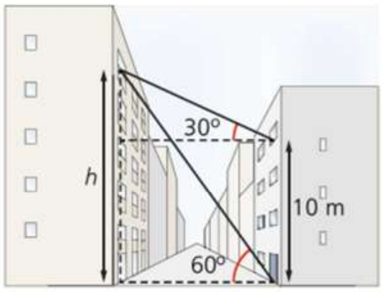
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} 60^{\circ} = \dfrac{y}{c} \end{array}\right\} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{c} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{10\sqrt{3}} \Rightarrow y = \dfrac{10 \cdot \sqrt{3}^2}{2} = 15 \Rightarrow y = 15 \text{ m}$$

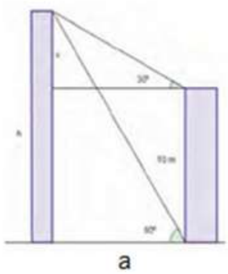
$b = B - (x + y) = 30 - (5 + 15) \Rightarrow b = 10$ m

$P = 10 + 10 + 10\sqrt{3} + 30 = 50 + 10\sqrt{3} = 67{,}32 \Rightarrow P = 67{,}32$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(30+10)\cdot 5\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} = 173{,}21 \Rightarrow A = 173{,}21 \text{ m}$$

36 **Ana vive enfrente de su amiga Paula. Si Ana se coloca a la entrada de su portal, visualiza la ventana de Paula con una inclinación de 60°, pero desde su ventana, que está a 10 m del suelo, lo hace con una inclinación de 30°. ¿A qué altura está la ventana de Paula?**





$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 30^{\circ} = \dfrac{x}{a} \\ \operatorname{tg} 60^{\circ} = \dfrac{10+x}{a} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{a} \\ \sqrt{3} = \dfrac{10+x}{a} \end{array}\right\}$$

Se despeja x de la primera ecuación y se sustituye en la segunda:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

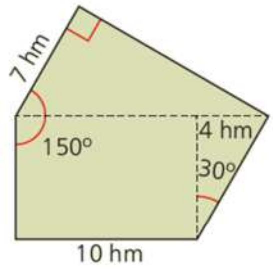
$$\sqrt{3} = \frac{10 + \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a} \Rightarrow a\sqrt{3} = 10 + \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3a\sqrt{3} = 30 + a\sqrt{3} \Rightarrow 2a\sqrt{3} = 30 \Rightarrow a = \frac{30}{2\sqrt{3}}$$

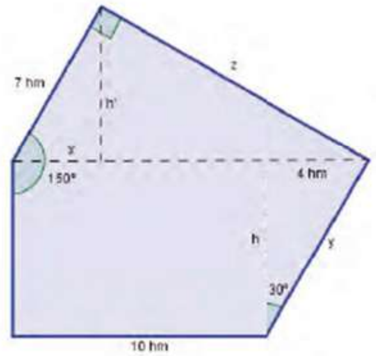
Se sustituye este valor de a en la primera ecuación:

$$x = \frac{\dfrac{30}{2\cancel{\sqrt{3}}}\cancel{\sqrt{3}}}{3} = 5$$

Está a 5 m de la ventana de Ana, y a 15 m del suelo.

37 Eusebio posee una finca y quiere calcular cuántas hectáreas tiene. Ha realizado las siguientes mediciones. ¿Cuál es el área de su finca? ¿Cuántos metros de valla necesitará para cercarla?





Las longitudes del triángulo superior son:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } 60^\circ = \dfrac{h'}{7} \\ \text{sen } 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \dfrac{h'}{7} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h' = \dfrac{7\sqrt{3}}{2} \text{ hm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor de z:

$$z = \sqrt{14^2 - 7^2} \Rightarrow z = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$$

El área del triángulo es:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{14 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{49\sqrt{3}}{2} \text{ hm}^2$$

Las dimensiones del triángulo inferior derecha son:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg } 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{tg } 30^\circ = \dfrac{4}{h}\end{array}\right\} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4}{h} \Rightarrow h = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ hm}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } 30^\circ = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen } 30^\circ = \dfrac{4}{y}\end{array}\right\} \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{y} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow y = 8 \text{ hm}$$

El área del triángulo es:

$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \Rightarrow A_2 = 8\sqrt{3} \text{ hm}^2$$

El área del rectángulo es:
$A_3 = b \cdot h \Rightarrow A_3 = 10 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow A_3 = 40\sqrt{3}$ hm^2

Con lo que el área total es:
$A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{49\sqrt{3}}{2} + 8\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = \dfrac{(49+16+80)\sqrt{3}}{2} = \dfrac{145\sqrt{3}}{2}$ hm^2
La longitud de valla que necesita es;
$P = 7 + 7\sqrt{3} + 8 + 10 + 4\sqrt{3} = 25 + 11\sqrt{3}$ hm = 44,05 hm

SOLUCIONES PÁG. 169

1 Indica qué unidades de medida se utilizan para medir ángulos. ¿Cuáles son las que vamos a utilizar? ¿Qué equivalencia existe entre dichas unidades de medida?

Para medir ángulos se utilizan los grados sexagesimales y los radianes, de modo que π rad equivalen a 180º.

2 ¿Cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo? ¿Y sus razones inversas?

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son el seno, el coseno y la tangente, siendo sus inversas la cosecante, la secante y la cotangente, respectivamente.

3 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

	0º	90º	180º	270º	30º	60º	45º
Seno	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Coseno	1	0	–1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tangente	0	-	0	-	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
Cosecante	-	1	-	1	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$
Secante	1	-	–1	-	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$
Cotangente	-	0	-	0	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

4 Indica si estas afirmaciones son o no ciertas:

a. El seno de un ángulo puede ser mayor que 1.
Falso, está entre –1 y 1.

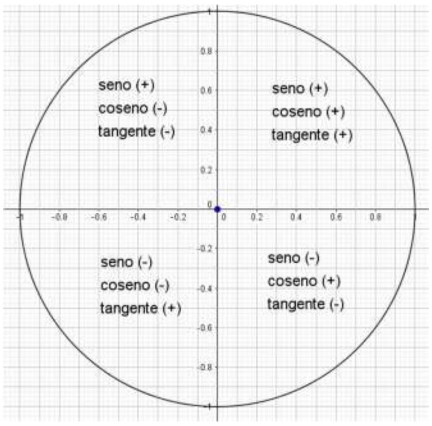
b. La tangente de un ángulo nunca puede ser mayor que 1.
Falso, sí puede.

c. **La cosecante de un ángulo puede ser mayor que 1.**
Verdadero.

d. **El coseno de un ángulo está comprendido entre –1 y 1.**
Verdadero.

e. **La suma del seno más el coseno es siempre 1.**
Falso, la suma de sus cuadrados es igual a la unidad.

5 **Dibuja una circunferencia goniométrica, sitúa en ella los cuatro cuadrantes e indica el signo de las distintas razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.**



6 **¿Cuál es la relación fundamental de la trigonometría? ¿Qué otras relaciones importantes se utilizan para realizar cálculos en los que intervengan razones trigonométricas?**

La relación fundamental de la trigonometría es:

$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

Otras relaciones importantes son:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \qquad 1 + \text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad 1 + \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$$

7 **Indica cómo reducir las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante a un ángulo del primer cuadrante.**

sen (180° – α) = sen α
cos (180° – α) = –cos α
tg (180° – α) = –tg α

8 **¿Qué equivalencia tienen las razones trigonométricas del tercer cuadrante con las del primer cuadrante?**

sen (180° + α) = –sen α
cos (180° + α) = –cos α
tg (180° + α) = tg α

9 Indica qué ocurre con las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios.

sen (90° – α) = cos α
cos (90° – α) = sen α
$\text{tg}\ (90^{\circ} - \alpha) = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

10 ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de un ángulo y su ángulo opuesto?

sen (–α) = –sen α
cos (–α) = cos α
tg (–α) = –tg α

11 Prepara una presentación digital para tus compañeros sobre el origen de la trigonometría y su evolución a lo largo de la historia. Puedes hacer un documento Power-Point, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 170 - REPASO FINAL

MEDIDAS DE ÁNGULOS: EL RADIÁN

1 Indica a cuántos grados equivalen los siguientes ángulos expresados en radianes:

a. $\mathbf{\dfrac{2\pi}{6}}$ **rad**

$$\frac{2\pi}{6}\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 60^{\circ}$$

b. 4,5 rad

$$4{,}5\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 257{,}83^{\circ}$$

c. $\mathbf{\dfrac{3\pi}{5}}$ **rad**

$$\frac{3\pi}{5}\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 108^{\circ}$$

d. 2,6 rad

$$2{,}6\ \text{rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{rad}} = 148{,}97^{\circ}$$

e. $\mathbf{\frac{3\pi}{4}}$ **rad**

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} \cdot \frac{180º}{\pi \text{ rad}} = 135º$$

f. 2,5π rad

$$2{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180º}{\pi \text{ rad}} = 143{,}24º$$

g. $\mathbf{\frac{3\pi}{2}}$ **rad**

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} \cdot \frac{180º}{\pi \text{ rad}} = 270º$$

f. 1,2π rad

$$1{,}2 \text{ rad} \cdot \frac{180º}{\pi \text{ rad}} = 68{,}75º$$

2 Expresa en radianes estos ángulos:

a. 35º

$$35º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{7\pi}{36} \text{ rad}$$

b. 70º

$$70º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{7\pi}{18} \text{ rad}$$

c. 260º

$$260º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{13\pi}{9} \text{ rad}$$

d. 190º

$$190º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{19\pi}{18} \text{ rad}$$

e. 200º

$$200º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{10\pi}{9} \text{ rad}$$

f. 100º

$$100º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad}$$

g. 450º

$$450º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

h. 290º

$$290º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{29\pi}{18} \text{ rad}$$

3 Dos de los ángulos de un triángulo miden 20º y $\frac{2\pi}{5}$ rad, respectivamente. Indica cuáles son las medidas de sus tres ángulos tanto en radianes como en grados sexagesimales.

180º – (20º + 72º) = 88º

Los tres ángulos en grados sexagesimales miden 20º, 72º y 88º, respectivamente.
Los tres ángulos en radianes son $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{5}$ y $\frac{22\pi}{45}$ respectivamente.

4 Halla el ángulo central de los siguientes polígonos regulares, expresando el resultado en grados sexagesimales y en radianes:

a. Un heptágono.

$$\frac{360º}{7} = 51{,}43º$$

$$51{,}43º \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180º} = 0{,}29\pi \text{ rad}$$

b. Un octógono.

$$\frac{360º}{8} = 45º$$

$$45º \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180º} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

c. Un hexágono.

$$\frac{360º}{6} = 60º$$

$$60º \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180º} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

d. Un eneágono.

$$\frac{360º}{9} = 40º$$

$$40º \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180º} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

5 Actividad resuelta.

6 **Halla con la calculadora el valor de los ángulos que tienen las siguientes razones trigonométricas, tanto en grados como en radianes:**

a. sen α = 0,98
α = arc sen 0,98 = 78º 31' 17,97'' = 1,37 rad

b. cos α = 0,94
α = arccos 0,94 = 19º 56' 54,4'' = 0,35 rad

c. tg α = 0,27
α = arc tg 0,27 = 15º 6' 34,47'' = 0,26 rad

d. sen α = 0,34
α = arc sen 0,34 = 19º 52' 36,75'' = 0,35 rad

e. cos α = 0,64
α = arccos 0,64 = 50º 12' 29,45'' = 0,88 rad

f. tg α = 2,75
α = arc tg 2,75 = 70º 1' 0,82'' = 1,22 rad

7 **Calcula las siguientes razones trigonométricas con ayuda de la calculadora y redondea los resultados a las centésimas:**

a. sen (87º) = 1,00

b. cos (32º 45' 6'') = 0,84

c. sen (78º 55') = 0,98

d. tg (1,1 rad) = tg (63º 1' 31,29'') = 1,94

e. sen (0,3 rad) = sen (17º 11' 19,44'') = 0,30

f. tg (1,2 rad) = tg (68º 45' 17,77'') = 2,57

g. cos (7º 54'') = 0,99

h. tg (76º 34' 45'') = 4,19

i. cos (56º 25'') = 0,56

8 **Utilizando su definición, halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos pertenecientes a triángulos rectángulos de los que se conocen los siguientes datos:**

a. Tiene un cateto contiguo de 14,5 cm y una hipotenusa de 210,5 cm.
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{210{,}5^2 - 14{,}5^2} \Rightarrow b = 210 \text{ cm}$

Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{210}{210,5} = 1$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{14,5}{210,5} = 0,069$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{210}{14,5} = 14,48$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{210,5}{210} = 1$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{210,5}{14,5} = 14,52$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{14,5}{210} = 0,07$

b. Tiene un cateto contiguo de 8 cm y un cateto opuesto de 1,8 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{1,8^2 + 8^2} = \sqrt{67,24} = 8,2 \Rightarrow a = 8,2 \text{ cm}$

Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{1,8}{8,2} = 0,22$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{8}{8,2} = 0,98$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{1,8}{8} = 0,23$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{8,2}{1,8} = 4,56$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{8,2}{8} = 1,03$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{8}{1,8} = 4,44$

c. Tiene un cateto opuesto de 4 cm y una hipotenusa de 20,2 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{20,2^2 - 4^2} = \sqrt{392,04} \Rightarrow b = 19,8 \text{ cm}$

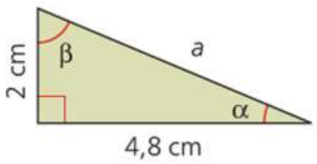
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{4}{20,2} = 0,2$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{19,8}{20,2} = 0,98$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{4}{19,8} = 0,2$

- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{20,2}{4} = 5,05$
- $\text{sec } \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{20,2}{19,8} = 1,02$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{19,8}{4} = 4,95$

9 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos, hallando con la calculadora su valor en grados sexagesimales:

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{4,8^2 + 2^2} = \sqrt{27,04} = 5,2 \Rightarrow a = 5,2 \text{ cm}$

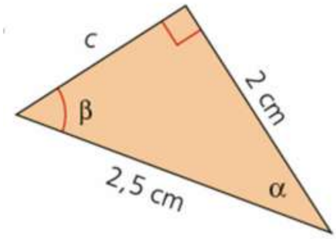
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2}{5,2} = 0,38$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4,8}{5,2} = 0,92$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{2}{4,8} = 0,42$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{5,2}{2} = 2,6$
- $\text{sec } \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{5,2}{4,8} = 1,08$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{4,8}{2} = 2,4$

Para el ángulo β:

- $\text{sen } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \dfrac{4,8}{5,2} = 0,92$
- $\cos \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{2}{5,2} = 0,38$
- $\text{tg } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \dfrac{4,8}{2} = 2,4$
- $\text{cosec } \beta = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{5,2}{4,8} = 1,08$
- $\text{sec } \beta = \dfrac{1}{\cos \beta} \Rightarrow \text{sec } \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{5,2}{2} = 2,6$
- $\text{cotg } \beta = \dfrac{1}{\text{tg } \beta} \Rightarrow \text{cotg } \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{2}{4,8} = 0,42$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 \Rightarrow c = 1,5$ cm

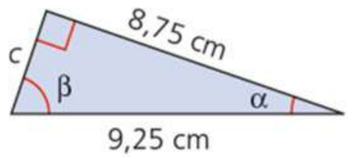
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{2}{2,5} = 0,8$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{2,5}{1,5} = 1,67$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{2}{1,5} = 1,33$

Para el ángulo β:

- $\text{sen } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \dfrac{2}{2,5} = 0,8$
- $\cos \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{1,5}{2,5} = 0,6$
- $\text{tg } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \dfrac{2}{1,5} = 1,33$
- $\text{cosec } \beta = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$
- $\sec \beta = \dfrac{1}{\cos \beta} \Rightarrow \sec \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{2,5}{1,5} = 1,67$
- $\text{cotg } \beta = \dfrac{1}{\text{tg } \beta} \Rightarrow \text{cotg } \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$

c.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{9,25^2 - 8,75^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow c = 3$ cm

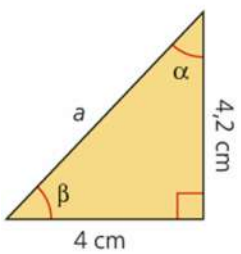
Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{9,25} = 0,32$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{8,75}{9,25} = 0,95$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{8,75} = 0,34$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{9,25}{3} = 3,08$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{3}{9,25} = 0,32$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{8,75}{3} = 2,92$

Para el ángulo β:

- $\text{sen } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \dfrac{8,75}{9,25} = 0,95$
- $\cos \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{3}{9,25} = 0,32$
- $\text{tg } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \dfrac{8,75}{3} = 2,92$
- $\text{cosec } \beta = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$
- $\sec \beta = \dfrac{1}{\cos \beta} \Rightarrow \sec \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{9,25}{3} = 3,08$
- $\text{cotg } \beta = \dfrac{1}{\text{tg } \beta} \Rightarrow \text{cotg } \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{3}{8,75} = 0,34$

d.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{4,2^2 + 4^2} = \sqrt{33,64} = 5,8 \Rightarrow a = 5,8 \text{ cm}$

Para el ángulo α:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5,8} = 0,69$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4,2}{5,8} = 0,72$

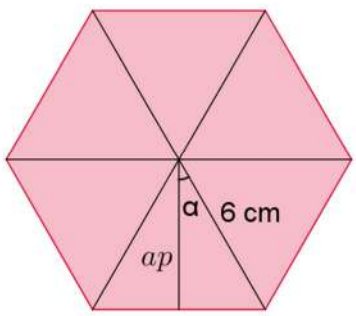
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{4}{4,2} = 0,95$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{5,8}{4} = 1,45$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{5,8}{4,2} = 1,38$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{4,2}{4} = 1,05$

Para el ángulo β:

- $\text{sen } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \dfrac{4,2}{5,8} = 0,72$
- $\cos \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{4}{5,8} = 0,69$
- $\text{tg } \beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \dfrac{4,2}{4} = 1,05$
- $\text{cosec } \beta = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{5,8}{4,2} = 1,38$
- $\sec \beta = \dfrac{1}{\cos \beta} \Rightarrow \sec \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{5,8}{4} = 1,45$
- $\text{cotg } \beta = \dfrac{1}{\text{tg } \beta} \Rightarrow \text{cotg } \beta = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{4}{4,2} = 0,95$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

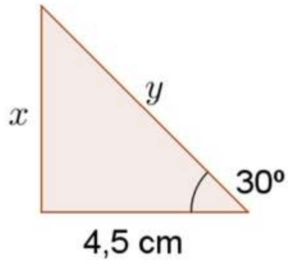
10 Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 6 cm.



$$\cos \alpha = \frac{ap}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow ap = \cos \alpha \cdot \text{hipotenusa} \Rightarrow ap = \cos 30 \cdot 6$$

$$ap = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ cm}$$

11 En un triángulo rectángulo, el cateto contiguo a un ángulo de 30º mide 4,5 cm. ¿Cuánto medirá la hipotenusa? ¿Y el otro cateto?



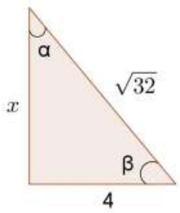
$$\text{tg } 30^\circ = \frac{x}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow x = \text{tg } 30^\circ \cdot \text{cateto contiguo}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4,5 = 2,6 \Rightarrow x = 2,6 \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{4,5^2 + 2,6^2} = \sqrt{27,01} = 5,2 \Rightarrow y = 5,2 \text{ cm}$$

SOLUCIONES PÁG. 171

12 Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4 cm, y su hipotenusa, $\sqrt{32}$ cm.



a. ¿Cuánto miden los ángulos agudos de dicho triángulo rectángulo?
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$\left(\sqrt{32}\right)^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow 32 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

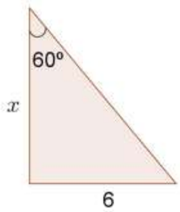
Los dos ángulos agudos miden 45º porque los dos catetos miden lo mismo.

b. Halla el valor del cateto desconocido a partir de las razones trigonométricas.

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{32}} \Rightarrow x = \text{sen } 45^\circ \cdot \sqrt{32}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{32} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

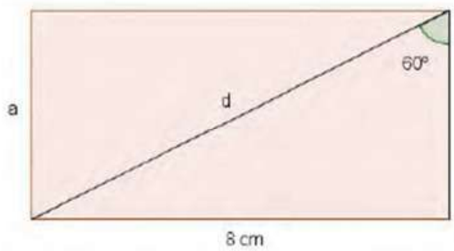
13 ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo rectángulo si sabemos que el lado opuesto al ángulo de 60º mide 6 cm?



$$\text{tg } 60º = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{\text{tg } 60º} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,46 \Rightarrow x = 3,46 \text{ cm}$$

Uno de los catetos mide 6 cm y el otro cateto mide 3,46 cm.

14 Un rectángulo tiene una longitud de 8 cm. Si dividimos dicho rectángulo mediante su diagonal, resultan dos triángulos rectángulos iguales. Si el largo de 8 cm es el cateto opuesto a un ángulo de 60º, halla, aplicando las razones trigonométricas:



a. La diagonal del rectángulo.

$$\text{sen } 60º = \frac{8}{d} \Rightarrow d = \frac{8}{\text{sen } 60º} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 9,24 \Rightarrow d = 9,24 \text{ cm}$$

b. El ancho del rectángulo.

$$\cos 60º = \frac{a}{9,24} \Rightarrow a = \cos 60º \cdot 9,24 = 4,62 \Rightarrow a = 4,62 \text{ cm}$$

c. El área y el perímetro de dicho rectángulo.

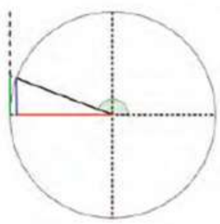
$$A = b \cdot h \Rightarrow A = 8 \cdot 4,62 = 36,96 \Rightarrow A = 36,96 \text{ cm}^2$$

$$P = 8 \cdot 2 + 4,62 \cdot 2 = 25,24 \Rightarrow P = 25,24 \text{ cm}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

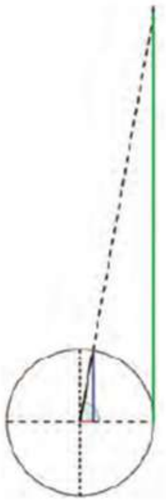
15 Dibuja estos ángulos y utiliza la regla para calcular sus razones trigonométricas:

a. 160º



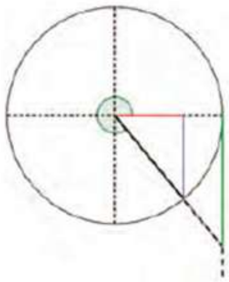
sen 160º = 0,34; cos 160º = –0,94; tg 160º = –0,36

b. 80º



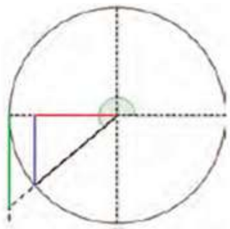
sen 80º = 0,98; cos 80º = 0,17; tg 80º = 5,67

c. 310º



sen 310º = –0,77; cos 310º = 0,64; tg 310º = –1,19

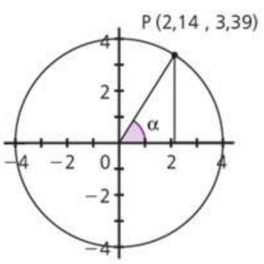
d. 220º



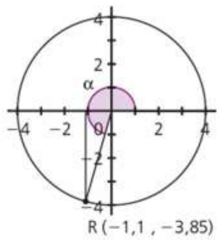
sen 220º = –0,64; cos 220º = –0,77; tg 220º = 0,84

16 Fíjate en los cuatro ángulos dibujados.

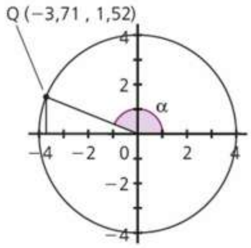
1.



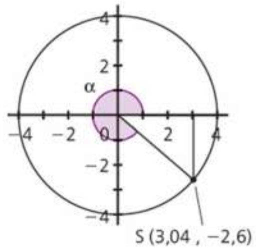
3.



2.



4.



a. Halla sus razones trigonométricas.

	Hipotenusa	Seno	Coseno	Tangente
1.	$a=\sqrt{2{,}14^2+3{,}39^2}$ $a=\sqrt{4{,}58+11{,}49}$ $a=\sqrt{16{,}07}=4{,}01$	$\text{sen }\alpha=\dfrac{3{,}39}{4{,}01}$ $\text{sen }\alpha=0{,}85$	$\cos\alpha=\dfrac{2{,}14}{4{,}01}$ $\cos\alpha=0{,}53$	$\text{tg }\alpha=\dfrac{3{,}39}{2{,}14}$ $\text{tg }\alpha=1{,}58$
2.	$a=\sqrt{(-3{,}71)^2+1{,}52^2}$ $a=\sqrt{13{,}76+2{,}31}$ $a=\sqrt{16{,}07}=4{,}01$	$\text{sen }\alpha=\dfrac{1{,}52}{4{,}01}$ $\text{sen }\alpha=0{,}38$	$\cos\alpha=\dfrac{-3{,}71}{4{,}01}$ $\cos\alpha=-0{,}93$	$\text{tg }\alpha=\dfrac{0{,}38}{-0{,}93}$ $\text{tg }\alpha=-0{,}41$
3.	$a=\sqrt{(-3{,}85)^2+(-1{,}1)^2}$ $a=\sqrt{14{,}82+1{,}21}$ $a=\sqrt{16{,}03}=4$	$\text{sen }\alpha=\dfrac{-3{,}85}{4}$ $\text{sen }\alpha=-0{,}96$	$\cos\alpha=\dfrac{-1{,}1}{4}$ $\cos\alpha=-0{,}28$	$\text{tg }\alpha=\dfrac{-3{,}85}{-1{,}1}$ $\text{tg }\alpha=3{,}5$
4.	$a=\sqrt{3{,}04^2+(-2{,}6)^2}$ $a=\sqrt{9{,}24+6{,}76}$ $a=\sqrt{16}=4$	$\text{sen }\alpha=\dfrac{-2{,}6}{4}$ $\text{sen }\alpha=-0{,}65$	$\cos\alpha=\dfrac{3{,}04}{4}$ $\cos\alpha=0{,}76$	$\text{tg }\alpha=\dfrac{-2{,}6}{3{,}04}$ $\text{tg }\alpha=-0{,}86$

b. Con ayuda de la calculadora, determina cada uno de los ángulos.

	Ángulo
1.	α = arctg 1,58 = 57,67º
2.	α = arctg (–0,41) = 157,71º
3.	α = arctg 3,5 = 254,05º
4.	α = arctg (–0,86) = 319,3º

17 Indica en qué cuadrante se sitúan los siguientes ángulos y qué signos tendrán sus razones trigonométricas:

a. 256º
Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

b. 5,2 rad

$$5{,}2\text{ rad}\cdot\frac{180^{\circ}}{\pi\,\text{rad}}=297^{\circ}56'$$

Se encuentra en el cuarto cuadrante: seno (–), coseno (+), tangente (–)

c. 24º
Se encuentra en el primer cuadrante: seno (+), coseno (+), tangente (+)

d. 1,3 rad

$$1{,}3\ \text{rad} \cdot \frac{180º}{\pi\,\text{rad}} = 74º\,29'$$

Se encuentra en el primer cuadrante: seno (+), coseno (+), tangente (+)

e. 202º

Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

f. 4,1 rad

$$4{,}1\ \text{rad} \cdot \frac{180º}{\pi\,\text{rad}} = 234º\,54'$$

Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

g. 105º

Se encuentra en el segundo cuadrante: seno (+), coseno (–), tangente (–)

h. 2,8 rad

$$2{,}8\ \text{rad} \cdot \frac{180º}{\pi\,\text{rad}} = 160º\,25'$$

Se encuentra en el segundo cuadrante: seno (+), coseno (–), tangente (–)

18 Identifica en qué cuadrante o cuadrantes se encuentran los ángulos que tienen las siguientes razones trigonométricas:

a. sen α = 0,42

En el primero o segundo.

b. tg α = –0,75

En el segundo o cuarto.

c. cos α = –0,19

En el segundo o tercero.

d. tg α = 4,52

En el primero o tercero.

e. cos α = 0,67

En el primero o cuarto.

f. sec α = –1,2

En el segundo o tercero.

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICA

19 A partir de las siguientes razones trigonométricas, halla las restantes, sabiendo que los ángulos pertenecen al primer cuadrante:

a. cos α = 0,55

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0{,}55^2 = 1$

  $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}3} = 0{,}84 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0{,}84$

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{0,84}{0,55} = 1,53 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 1,53$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{0,84} = 1,19 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 1,19$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{1}{0,55} = 1,82 \Rightarrow \sec \alpha = 1,82$
- $\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{1,53} = 0,65 \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = 0,65$

b. sen α = 0,92

- $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,92^2 + \cos^2 \alpha = 1$

  $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,85} = 0,39 \Rightarrow \cos \alpha = 0,39$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{0,92}{0,39} = 2,36 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 2,36$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{0,92} = 1,09 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 1,09$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{1}{0,39} = 2,56 \Rightarrow \sec \alpha = 2,56$
- $\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{2,36} = 0,42 \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = 0,42$

c. tg α = $\mathbf{\dfrac{6}{5}}$

- $1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \dfrac{61}{25} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

  $\cos \alpha = \sqrt{\dfrac{25}{61}} = \dfrac{5\sqrt{61}}{61} = 0,64 \Rightarrow \cos \alpha = 0,64$

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\dfrac{5\sqrt{61}}{61}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{5\sqrt{61}}{61} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{6\sqrt{61}}{61} = 0,77 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \text{sen } \alpha = 0,77$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{0,77} = 1,3 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 1,3$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{1}{0,64} = 1,56 \Rightarrow \sec \alpha = 1,56$
- $\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{\dfrac{6}{5}} = 0,83 \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = 0,83$

d. sen α = $\frac{1}{3}$

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

  $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,94 \Rightarrow \cos\alpha = 0,94$

- $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,35 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 0,35$

- $\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = 3$

- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 1,06 \Rightarrow \sec\alpha = 1,06$

- $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{0,35} = 2,86 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = 2,86$

e. tg α = 2,42

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 2,42^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 6,86 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

  $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{6,86}} = \frac{5\sqrt{14}}{49} = 0,38 \Rightarrow \cos\alpha = 0,38$

- $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2,42 = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\frac{5\sqrt{14}}{49}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 2,42 \cdot \frac{5\sqrt{14}}{49} = 0,92 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,92$

- $\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{0,92} = 1,09 \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = 1,09$

- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{0,38} = 2,63 \Rightarrow \sec\alpha = 2,63$

- $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{2,42} = 0,41 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = 0,41$

f. cos α = 0,25

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0,25^2 = 1$

  $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} = 0,97 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0,97$

- $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{0,97}{0,25} = 3,88 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 3,88$

- $\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{0,97} = 1,03 \Rightarrow \text{cosec}\ \alpha = 1,03$

- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{0,25} = 4 \Rightarrow \sec\alpha = 4$
- $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{3,88} = 0,26 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = 0,26$

g. tg α = 0,58

- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 0,58^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1,34 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

  $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1,34}} = \dfrac{5\sqrt{134}}{67} = 0,86 \Rightarrow \cos\alpha = 0,86$

- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 0,58 = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\frac{5\sqrt{134}}{67}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,58 \cdot \dfrac{5\sqrt{134}}{67} = 0,50 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,50$
- $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{0,50} = 2 \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = 2$
- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{0,86} = 1,16 \Rightarrow \sec\alpha = 1,16$
- $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{0,58} = 1,72 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = 1,72$

h. cos α = $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{9}}$

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{9}\right)^2 = 1$

  $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{81}} = \dfrac{\sqrt{79}}{9} = 0,99 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,99$

- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{79}}{9}}{\frac{\sqrt{2}}{9}} = 6,28 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 6,28$
- $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{0,99} = 1,01 \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = 1,01$
- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{0,16} = 6,25 \Rightarrow \sec\alpha = 6,25$
- $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{6,28} = 0,16 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = 0,16$

i. sen α = $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}$

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

  $\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{3}{25}} = \sqrt{\dfrac{22}{25}} = \dfrac{\sqrt{22}}{5} = 0,94 \Rightarrow \cos\alpha = 0,94$

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \dfrac{\sqrt{66}}{22} = 0{,}37 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 0{,}37$
- $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{5}} = 2{,}89 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 2{,}89$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = 1{,}07 \Rightarrow \sec \alpha = 1{,}07$
- $\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{0{,}37} = 2{,}70 \Rightarrow \text{cotg}\, \alpha = 2{,}70$

20 Calcula el seno, el coseno y la tangente de los ángulos que tienen estas razones trigonométricas:

Primero calculamos las razones trigonométricas sin tener en cuenta los signos, y luego indicamos los signos.

a. cosec $\alpha = -2\sqrt{2}$, con 180º < α < 270º

- $\text{cosec } \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \dfrac{2}{16} = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{2}{16} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{14}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{14}{16}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} = -0{,}35$, $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{14}}{4} = -0{,}94$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{7} = 0{,}38$

b. cotg $\alpha = -\dfrac{1}{4}$, con 270º < α < 360º

- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 4$
- $1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 4^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 17 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17} = 0{,}24$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 4 = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\frac{\sqrt{17}}{17}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{4\sqrt{17}}{17} = 0{,}97$

Como el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, las razones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = -\dfrac{4\sqrt{17}}{17} = -0{,}97$, $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{17}}{17} = 0{,}24$, $\text{tg } \alpha = -4$

c. $\sec \alpha = -\dfrac{41}{4}$**, con 90º < α < 180º**

- $\sec \alpha = \frac{41}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{41} = 0{,}098$
- $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{4}{41}\right)^2} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1681}{16} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1681}{16} - 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow tg\ \alpha = \sqrt{\frac{1665}{16}} = \frac{3\sqrt{185}}{4} = 10{,}20$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3\sqrt{185}}{4} = \frac{sen\ \alpha}{\frac{4}{41}} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{185}}{4} \cdot \frac{4}{41} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{185}}{41} = 0{,}995$

Como el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, las razones trigonométricas son:

$$sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{185}}{41} = 0{,}995,\ \cos \alpha = -\frac{4}{41} = -0{,}098,\ tg\ \alpha = -\frac{3\sqrt{185}}{4} = -10{,}20$$

d. cotg α = 1, con 180º < α < 270º

- $cotg\ \alpha = 1 \Rightarrow tg\ \alpha = 1$
- $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 1^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 1 = \frac{sen\ \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow sen\ \alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$

Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, las razones trigonométricas son:

$$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}71,\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}71,\ tg\ \alpha = 1$$

e. cosec α = –2, con 270º < α < 360º

- $cosec\ \alpha = 2 \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $\cos^2 \alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$

Como el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, las razones trigonométricas son:

$$sen\ \alpha = -\frac{1}{2} = -0{,}5,\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87,\ tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}58$$

f. **sec α = $-\frac{5}{2}$, con 90º < α < 180º**

- $\sec\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{5} = 0,4$
- $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \Rightarrow 1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{25}{4} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{25}{4}-1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \mathrm{tg}\ \alpha = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2} = 2,29$
- $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow \mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0,92$

  Como el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, las razones trigonométricas son:

  $\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0,92$, $\cos\alpha = -\frac{2}{5} = -0,4$, $\mathrm{tg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2} = -2,29$

21 Simplifica las expresiones utilizando las distintas relaciones entre las razones trigonométricas.

a. $\dfrac{\mathbf{tg^2\ \alpha - sec^2\alpha}}{\mathbf{1+cotg^2\ \alpha}}$

$$\frac{\mathrm{tg}^2\ \alpha-\sec^2\alpha}{1+\mathrm{cotg}^2\ \alpha} = \frac{\frac{\mathrm{sen}^2\ \alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\ \alpha}} = \frac{\frac{\mathrm{sen}^2\ \alpha-1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\ \alpha}} = \frac{\frac{-(-\mathrm{sen}^2\ \alpha+1)}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\ \alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\ \alpha}} = \frac{-\cancel{\cos^2\alpha}\cdot\mathrm{sen}^2\ \alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} = -\mathrm{sen}^2\ \alpha$$

b. $\dfrac{\mathbf{cos\ \alpha - sec\ \alpha}}{\mathbf{cos\ \alpha + sec\ \alpha}}$

$$\frac{\cos\ \alpha-\sec\alpha}{\cos\ \alpha+\sec\alpha} = \frac{\cos\ \alpha-\frac{1}{\cos\alpha}}{\cos\ \alpha+\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\ \alpha-1}{\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{\cos^2\ \alpha+1}{\cancel{\cos\alpha}}} = \frac{-(-\cos^2\ \alpha+1)}{\cos^2\ \alpha+1} = \frac{-\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\ \alpha+1}$$

c. $\dfrac{\mathbf{cos^2\ \alpha}}{\mathbf{1-sen\ \alpha}}$

$$\frac{\cos^2\ \alpha}{1-\mathrm{sen}\ \alpha} = \frac{1-\mathrm{sen}^2\alpha}{1-\mathrm{sen}\ \alpha} = \frac{(1+\mathrm{sen}\ \alpha)\cdot\ \cancel{(1-\mathrm{sen}\ \alpha)}}{\cancel{1-\mathrm{sen}\ \alpha}} = 1+\mathrm{sen}\ \alpha$$

d. $\dfrac{\mathbf{tg^2\ \alpha+1}}{\mathbf{cotg^2\ \alpha+1}}$

$$\frac{tg^2\ \alpha+1}{cotg^2\ \alpha+1}=\frac{\dfrac{1}{cos^2\ \alpha}}{\dfrac{1}{sen^2\alpha}}=\frac{sen^2\alpha}{cos^2\ \alpha}=tg^2\ \alpha$$

e. $\mathbf{1-\dfrac{sen\ \alpha\cdot cotg\ \alpha}{cosec\ \alpha\cdot tg\ \alpha}}$

$$1-\frac{sen\ \alpha\cdot cotg\ \alpha}{cosec\ \alpha\cdot tg\ \alpha}=1-\frac{\cancel{sen\ \alpha}\cdot\dfrac{cos\,\alpha}{\cancel{sen\ \alpha}}}{\dfrac{1}{\cancel{sen\ \alpha}}\cdot\dfrac{\cancel{sen\ \alpha}}{cos\,\alpha}}=1-cos^2\ \alpha=sen^2\ \alpha$$

f. $\mathbf{sen^3\ \alpha + sen\ \alpha\cdot cos^2\ \alpha}$

$$sen^3\alpha+\ sen\ \alpha\cdot\ cos^2\alpha=sen\ \alpha\cdot(sen^2\ \alpha+cos^2\alpha)=sen\ \alpha\cdot 1=\ sen\,\alpha$$

SOLUCIONES PÁG. 172

22 Comprueba si las igualdades propuestas son o no ciertas, aplicando las relaciones existentes entre las razones trigonométricas.

a. $\mathbf{\dfrac{1}{(1+cos\ \alpha)\cdot(1\ -\ cos\ \alpha)}=\ cosec^2\ \alpha}$

$$\frac{1}{(1+cos\ \alpha)\cdot(1\ -\ cos\ \alpha)}=\ cosec^2\ \alpha\Rightarrow\frac{1}{1\ -\ cos^2\ \alpha}=\ cosec^2\ \alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{sen^2\alpha}=cosec^2\ \alpha\Rightarrow cosec^2\ \alpha=cosec^2\ \alpha\Rightarrow \text{Sí es cierta.}$$

b. $\mathbf{\dfrac{cos^2\ \alpha}{1\ -\ sen\ \alpha}=\ 1+sen\ \alpha}$

$$\frac{cos^2\ \alpha}{1\ -\ sen\ \alpha}=\ 1+sen\ \alpha\Rightarrow\frac{1-sen^2\ \alpha}{1\ -\ sen\ \alpha}=\ 1+sen\ \alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(1+sen\ \alpha)\cdot\cancel{(1-sen\alpha)}}{\cancel{1\ -\ sen\ \alpha}}=\ 1+sen\ \alpha\Rightarrow 1+sen\ \alpha\Rightarrow \text{Sí es cierta.}$$

c. $\mathbf{\dfrac{sen\,\alpha}{1+tg^2\ \alpha}=\ cotg^2\ \alpha}$

$$\frac{sen\,\alpha}{1+tg^2\ \alpha}=\ cotg^2\ \alpha\Rightarrow\frac{sen\,\alpha}{\dfrac{1}{cos^2\ \alpha}}=\ cotg^2\ \alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\,\alpha\cdot cos^2\ \alpha\neq\frac{cos^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha}\Rightarrow \text{No es cierta.}$$

d. $\mathbf{\cos\alpha\cdot(tg\ \alpha + cotg\ \alpha) = \dfrac{1}{sen\ \alpha}}$

$$\cos\alpha\cdot(\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha) = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \cos\alpha\cdot\left(\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}\right) = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cdot\left(\frac{\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \alpha}\right) = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \cancel{\cos}\alpha\cdot\left(\frac{1}{\cancel{\cos}\alpha\cdot\text{sen}\ \alpha}\right) = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \text{Sí es cierta.}$$

23 Actividad resuelta.

24 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a. $\mathbf{\cos^2\alpha - \dfrac{1}{2} = sen^2\ \alpha}$

$$\cos^2\alpha - \frac{1}{2} = \text{sen}^2\ \alpha \Rightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \text{sen}^2\ \alpha - \text{sen}^2\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\text{sen}^2\ \alpha = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow -2\text{sen}^2\ \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\frac{1}{2}$$

- $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\ \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$
  para cualquier valor entero de k.
- $\text{sen}\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\ \left(-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 330^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 220^\circ + 360^\circ k \end{cases}$
  para cualquier valor entero de k.

b. $\mathbf{\dfrac{\cos^2\alpha}{3} = 1 - sen\ \alpha}$

$$\frac{\cos^2\alpha}{3} = 1 - \text{sen}\ \alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 3 - 3\text{sen}\ \alpha \Rightarrow 1 - \text{sen}^2\alpha - 3 + 3\text{sen}\ \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\text{sen}^2\alpha + 3\text{sen}\ \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha - 3\text{sen}\ \alpha + 2 = 0$$

Se hace el cambio x = sen α:

$$\text{sen}^2\alpha - 3\text{sen}\ \alpha + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

- sen α = 2, no existe ningún ángulo que tenga ese seno, porque el seno es un número que puede tomar valores entre –1 y 1.
- sen α = 1 ⇒ α = arcsen (1) = 90° + 360° k, para cualquier valor de k.

c. 2 cos α = 3 tg α

$$2 \cos \alpha = 3 \text{ tg } \alpha \Rightarrow 2 \cos \alpha = 3 \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = 3\text{sen } \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 (1 - \text{sen}^2 \alpha) = 3\text{sen } \alpha \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 3\text{sen } \alpha - 2 = 0$$

Se hace el cambio x = sen α:

$$2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 3\text{sen } \alpha - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

- $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen } \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$, para cualquier entero k.
- sen α = –2, no existe ningún ángulo que tenga ese seno, porque el seno de un ángulo toma valores comprendidos en el interval –1 y 1.

d. 3 cos² α + 5 = 5 sen α

$$3 \cos^2 \alpha + 5 = 5 \text{ sen } \alpha \Rightarrow 3 \cdot (1 - \text{sen}^2 \alpha) + 5 - 5\text{sen } \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\text{sen}^2 \alpha + 5\text{sen } \alpha - 8 = 0$$

Se hace el cambio x = sen α:

$$3\text{sen}^2 \alpha + 5\text{sen } \alpha - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{6} = \frac{-5 \pm 11}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+11}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5-11}{6} = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

- sen α = 1 ⇒ α = arcsen 1 = 90º + 360ºk, para cualquier entero k.
- $\text{sen } \alpha = -\frac{8}{3}$, no existe ningún ángulo que tenga ese seno, porque el seno de un ángulo toma valores comprendidos en el interval –1 y 1.

e. 2 tg α – 3 cotg α = 1

$$2 \text{ tg } \alpha - 3 \text{ cotg} \alpha = 1 \Rightarrow 2 \text{ tg } \alpha - 3 \frac{1}{\text{tg } \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{2 \text{ tg}^2 \alpha - 3}{\text{tg } \alpha} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \text{ tg}^2 \alpha - 3 = \text{tg } \alpha \Rightarrow 2 \text{ tg}^2 \alpha - \text{tg } \alpha - 3 = 0$$

Se hace el cambio x = tg α:

$$2 \text{ tg}^2 \alpha - \text{tg } \alpha - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

- $\text{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arctg } \frac{3}{2} = 56{,}31^\circ + 180^\circ k$, para cualquier entero k.
- tg α = –1 ⇒ α = arctg (–1) = 135º + 180ºk, para cualquier entero k.

f. $\mathbf{sen^2\,\alpha + cos\,\alpha = 1}$

$\text{sen}^2\alpha + \cos\alpha = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2\alpha + \cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha \cdot (\cos\alpha - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = 90º + 360º k \\ \alpha = 270º + 360º k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = 90º + 180º k$

$\Rightarrow \cos\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos 1 = 0º + 360º k$

Para cualquier entero k.

REDUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS AL PRIMER CUADRANTE

25 Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas, expresándolas primero en función de un ángulo del primer cuadrante:

a. tg 420º

tg 420º = tg (360º + 60º) = tg 60º = $\sqrt{3}$

b. tg (–60º)

tg (–60º) = –tg 60º = – $\sqrt{3}$

c. sen 1 200º

sen 1 200º = sen (360º · 3 + 120º) = sen 120º = sen (180º – 60º) =

= sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. cos 450º

cos 450º = cos (360º + 90º) = cos 90º = 0

e. tg 225º

tg 225º = tg (180º + 45º) = tg 45º = 1

f. sen 315º

sen 315º = sen (–45º) = –sen 45º = – $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26 Con ayuda de la calculadora, halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

α = 16º α = 74º

a. ¿Qué tienen en común dichas razones trigonométricas obtenidas?

El seno de 16º es el mismo que el coseno de 74º. El coseno de 16º coincide con el seno de 74º. La tangente de 16º es la inversa de la tangente de 74º.

b. ¿Por qué ocurre eso?

Esto ocurre porque 16º y 74º son ángulos complementarios, es decir, suman 90º.

27 Si cos α = 0,6 y α pertenece al primer cuadrante, determina las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

a. sen α

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

b. tg (–α)

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = -\frac{0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3} = -1{,}\widehat{3}$$

c. cos (180º – α)

cos (180º – α) = –cos α = –0,6

d. sen (180º – α)

sen (180º – α) = sen α = 0,8

e. cos (180º + α)

cos (180º + α) = –cos α = –0,6

f. cos (90º – α)

cos (90º – α) = sen α = 0,8

28 Si el ángulo α se sitúa en el tercer cuadrante y tg α = 2, establece las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

a. cos α

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Como está en el tercer cuadrante, $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}}$

b. sen α

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

Como está en el tercer cuadrante, $\text{sen}\,\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}}$

c. tg (180º + α)

tg (180º + α) = tg α = 2

d. cos (180º + α)

cos (180º + α) = –cos α = $\sqrt{\frac{1}{5}}$

e. sen (180º + α)

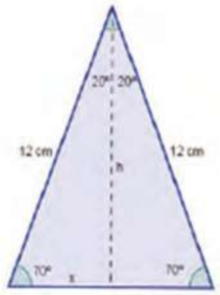
sen (180º + α) = –sen α = $\sqrt{\frac{4}{5}}$

f. tg (–α)

tg (–α) = –tg α = –2

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

29 Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm y forman un ángulo de 40º.

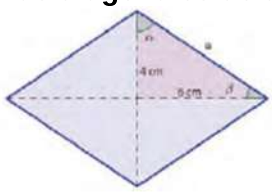


$$\left.\begin{array}{l}\cos 20º = \dfrac{h}{12} \\ \cos 20º = 0,94\end{array}\right\} \dfrac{h}{12} = 0,94 \Rightarrow h = 11,28 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } 20º = \dfrac{x}{12} \\ \text{sen } 20º = 0,34\end{array}\right\} \dfrac{x}{12} = 0,34 \Rightarrow x = 4,08 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{2x \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 4,08 \cdot 11,28}{2} = 46,02 \Rightarrow A = 46,02 \text{ cm}^2$$

30 Las diagonales de un rombo miden 8 cm y 12 cm, respectivamente.



a. Calcula su perímetro y su área.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado:

$a = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 7,21 \Rightarrow a = 7,21 \text{ cm}$

$P = 4 \cdot 7,21 = 28,84$ cm

$A = \dfrac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48 \Rightarrow A = 48 \text{ cm}^2$

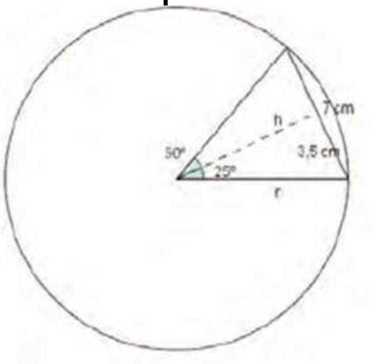
b. ¿Cuál es la abertura de sus ángulos?

tg $\alpha = \dfrac{6}{4} = 1,5 \Rightarrow \alpha = \text{arctg} 1,5 = 56,31º$

tg $\beta = \dfrac{4}{6} = 0,67 \Rightarrow \beta = \text{arctg } 0,67 = 33,82º$

Con lo que los ángulos son 2 · 56,31º = 112,62º y 2 · 33,82º = 67,64º.

31 Halla la longitud de una circunferencia sabiendo que a un ángulo central de 50º le corresponde una cuerda de 7 cm.



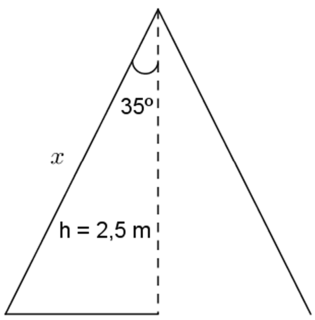
El radio de la circunferencia es:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 25^\circ = 0{,}42 \\ \text{sen } 25^\circ = \dfrac{3{,}5}{r} \end{array}\right\} 0{,}42 = \frac{3{,}5}{r} \Rightarrow r = \frac{3{,}5}{0{,}42} = 8{,}33 \Rightarrow r = 8{,}33 \text{ cm}$$

La longitud de la circunferencia es:

$L = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}33 = 52{,}31 \Rightarrow L = 52{,}31$ cm

32 Un pintor utiliza una escalera de tijera que tiene una abertura de 70º. Si con dicha escalera se alcanzan 2,5 m de altura, ¿cuánto miden sus brazos?

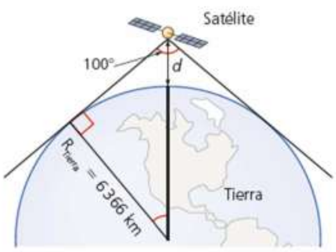


$$\left.\begin{array}{l} \cos 35^\circ = 0{,}82 \\ \cos 35^\circ = \dfrac{2{,}5}{x} \end{array}\right\} 0{,}82 = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x = \frac{2{,}5}{0{,}82} = 3{,}05$$

Cada brazo mide 3,05 m.

SOLUCIONS PÁG. 173

33 ¿A qué distancia se encuentra un satélite artificial desde el que se ve de la Tierra bajo un ángulo de 100º?



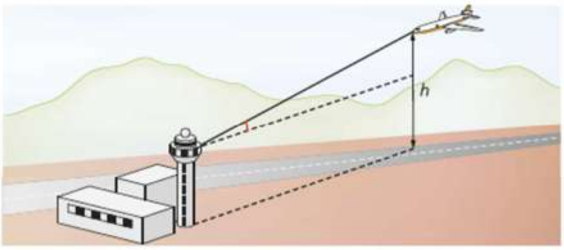
La distancia del centro de la Tierra al satélite es:

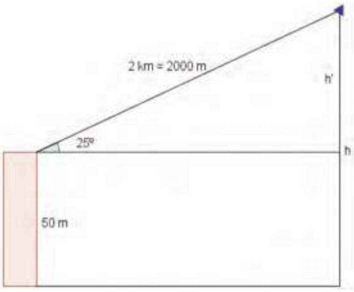
$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 50^{\circ} = 0{,}77 \\ \text{sen } 50^{\circ} = \dfrac{R_{\text{tierra}}}{R_{\text{tierra}} + d} = \dfrac{R_{\text{tierra}}}{D} \end{array}\right\} 0{,}77 = \frac{R_{\text{tierra}}}{D} \Rightarrow 0{,}77 = \frac{6\,366}{D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{6\,366}{0{,}77} = 8267{,}53 \Rightarrow D = 8267{,}53 \text{ km}$$

La distancia del satélite a la Tierra será:
d = *D* – *R* = 8 267,53 – 6 366 = 1 901,53 km

34 Un avión que se acerca a la pista de aterrizaje de un aeropuerto se encuentra a 2 km de la torre de control. ¿A qué altura vuela el avión si es observado con un ángulo de 25º desde la torre de control, que mide 50 m?

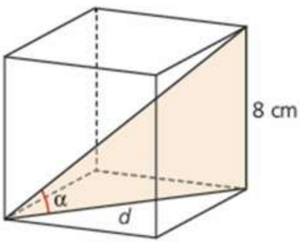




$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 25^{\circ} = 0{,}42 \\ \text{sen } 25^{\circ} = \dfrac{h'}{2\,000} \end{array}\right\} 0{,}42 = \frac{h'}{2\,000} \Rightarrow h' = 2\,000 \cdot 0{,}42 = 840$$

Con lo que el avión lleva una altura de: *h* = *h'* + 50 = 840 + 50 = 890 m

35 Calcula el ángulo que forma la diagonal de un cubo de 8 cm de arista con la diagonal de la base.



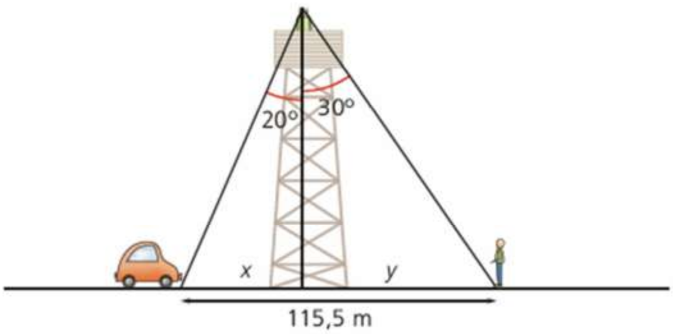
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de la base, *d:*

$$d = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 11{,}31 \Rightarrow d = 11{,}31 \text{ cm}$$

El ángulo pedido es:

$$\text{tg } \alpha = \frac{8}{d} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{8}{11{,}31} = 0{,}71 \Rightarrow \alpha = 35{,}37^{\circ}$$

36 Un vigilante está en una torre vigía. Desde allí observa un coche aparcado con un ángulo de visión de 20º. En el lado opuesto, puede ver a un compañero suyo bajo un ángulo de visión de 30º.



Si entre el coche y su compañero hay 115,5 m de distancia, ¿qué altura tiene la torre vigía?

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 20º = \dfrac{x}{h} \Rightarrow x = 0{,}36 \cdot h \\ \text{tg } 30º = \dfrac{y}{h} = \dfrac{115{,}5 - x}{h} \Rightarrow h = \dfrac{115{,}5 - x}{0{,}58} \end{array}\right\}$$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$h = \frac{115{,}5 - x}{0{,}58} \Rightarrow h = \frac{115{,}5 - 0{,}36 \cdot h}{0{,}58} \Rightarrow 0{,}58 \cdot h = 115{,}5 - 0{,}36 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{115{,}5}{0{,}94} = 122{,}87 \text{ m}$$

La torre tiene 122,87 m de altura.

EVALUACIÓN

1 Un ángulo de 0,5 rad equivale a otro de:

a. 8,7º b. 28,6º **c. 90º** **d. 1,6º**

$$0{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180º}{\pi \text{ rad}} = 0{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180º}{3{,}14 \text{ rad}} = 28{,}6º$$

2 Un ángulo de 80º equivale a otro de:

a. $\dfrac{9\pi}{4}$ **rad** **b. 0,44 rad** c. $\dfrac{4\pi}{9}$ rad **d. 7,07 rad**

$$80º \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180º} = \frac{4\pi}{9} \text{ rad}$$

3 De un triángulo rectángulo cuyas medidas son 3 cm, 4 cm y 5 cm el seno de uno de los ángulos agudos no puede medir:

a. 0,8 cm b. 0,75 cm **c. 0,6 cm** **d.** $\frac{6}{10}$ **cm**

sen α = $\frac{3}{5} = 0{,}6$ cm

sen β = $\frac{4}{5} = 0{,}8$ cm

4 El valor de la expresión tg 30° · sen 60° + sen 45° es:

a. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

tg 30° · sen 60° + sen 45° = $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

5 Si de un ángulo agudo el cos α = 0,5, el valor del sen α es:

a. 0,75 **b. 0,25** **c. 0,55** d. 0,87

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-0{,}5^2}=0{,}87$$

6 Si de un ángulo agudo la tg α = 2,2, el valor del cos α es:

a. 0,17 **b. 0,26** c. 0,41 **d. 0,51**

$$1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+2{,}2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 5{,}84=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5{,}84}}=\sqrt{0{,}17}=0{,}41$$

7 La expresión simplificada de $\frac{\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$ **es:**

a. sen^2 α **b. cos α** **c. cotg α** d. tg α

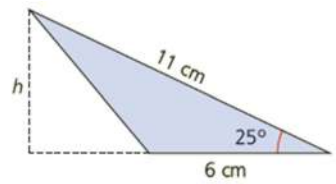
$$\frac{\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

8 El coseno de 1 475º es igual al coseno de:

a. 215º b. 325º **c. 55º** **d. 145º**

1 475º = 4 · 360º + 35º
cos 35º = cos (360º – 35º) = cos 325º

9 El área del siguiente triángulo es:



a. 25,41 cm^2 b. 13,86 cm^2 **c. 15,39 cm^2** **d. 8,46 cm^2**

Se calcula la altura:

$$\text{sen } 25º = \frac{h}{11} \Rightarrow h = 11 \cdot 0,42 = 4,62 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{6 \cdot 4,62}{2} = 13,86 \Rightarrow A = 13,86 \text{ cm}^2$$

10 Un árbol tiene una altura de 15 m. Si Pedro se acerca a él 10 m, lo ve bajo un ángulo de 40º. El ángulo bajo el cual veía el árbol desde su posición inicial es:

a. 28,3º **b. 25,3º** **c. 30º** **d. 24º**

$$\text{tg } 40º = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{0,84} = 17,86$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{15}{x+10} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{15}{17,86+10} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 0,54 \Rightarrow \alpha = 28,3º$$