MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 13. Semejanza. Teorema de Tales

Unidad 13. Semejanza. Teorema de Tales

SOLUCIONES PÁG. 251

1 Indica cuáles de estas figuras son semejantes entre sí.

a.

b.

c.

No son semejantes ninguna, ya que las longitudes de dos lados homólogos no guardan ninguna razón de semejanza.

2 La figura A se ha ampliado hasta obtener la figura B. Halla el tanto por ciento en el que se ha ampliado la imagen. Para ello, mide dos lados homólogos.

Figura A

Figura B

Se toman como lados homólogos las bases. En la figura A, la base mide 2,3 cm, en la figura B, la base mide 2,9 cm, es decir, la razón de semejanza es $r = \frac{2,9}{2,3} = 1,26$, por tanto, se ha producido una ampliación del 126 %.

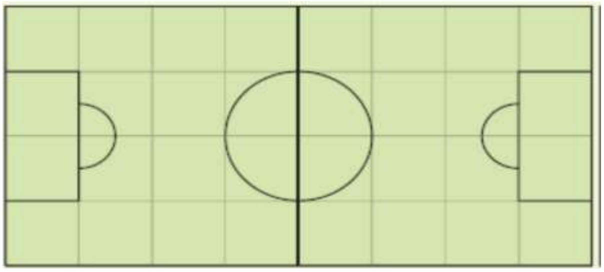
3 La figura A se ha reducido hasta obtener la figura B. Halla el tanto por ciento en el que se ha reducido la imagen.

Figura A

Figura B

Se toma como lado homógolo la altura del árbol. En la figura A, la altura mide 2,8 cm, en la figura B, la altura mide 2,2 cm, es decir, la razón de semejanza es $r = \frac{2,2}{2,8} = 0,78$, por tanto, se ha producido una disminución del 78 %.

4 **Dibuja en tu cuaderno esta figura y, a continuación, dibuja otra semejante con el doble de tamaño. Para ello, debes tomar una cuadrícula el doble de grande que la inicial. ¿Cuál es la razón de semejanza?**



Se calcula la razón de semejanza como el cociente entre dos lados homólogos. Si la figura es el doble de la del enunciado, r = 2

5 **Rodrigo y Nicolás posan juntos en una fotografía en la que miden 1,6 cm y 1,9 cm, respectivamente. Si Rodrigo tiene una altura real de 1,56 m:**

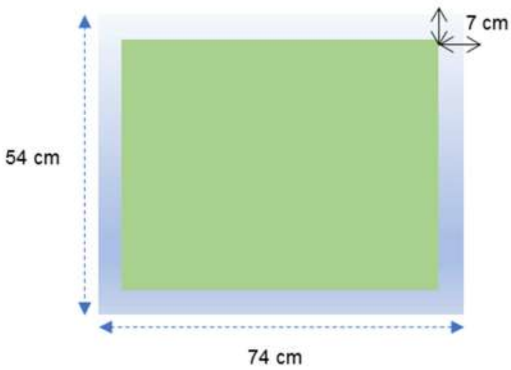
a. ¿Qué razón de semejanza se ha utilizado en la foto?

$r = \frac{1{,}6}{156} = 0{,}010$, es decir r = 1 %

b. ¿Cuánto mide realmente Nicolás?

$r = 0{,}010 = \frac{1{,}9}{x} \Rightarrow x = 185{,}25 \text{ cm}$, es decir, Nicolás mide 1,85 cm.

6 **La lámina de una pintura mide 60 cm × 40 cm. Se enmarca con un marco de 7 cm de ancho. ¿Es el rectángulo de la lámina semejante al rectángulo que forma el marco?**

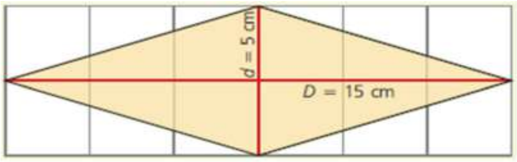


Las dimensiones del rectángulo del marco son, en su parte exterior, 74 cm × 54 cm, y las del rectángulo formado por la lámina son 60 cm × 40 cm.

Los rectángulos no son semejantes, porque sus lados homólogos no son proporcionales, $\frac{60}{74} \neq \frac{40}{54}$.

7 **Actividad resuelta.**

8 Dibuja un rombo semejante al de la figura mediante:



a. Una ampliación del 175 %.

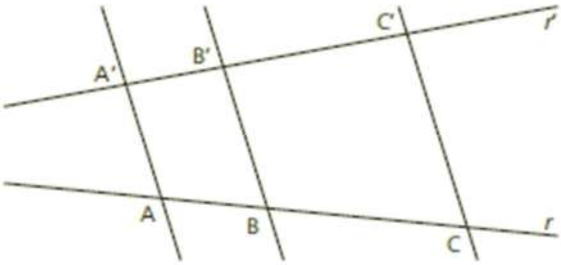
Con una ampliación del 175 %, la diagonal mayor mide 15 · 1,75 = 26,25 cm y la diagonal menor mide 5 · 1,75 = 8,75 cm.

b. Una reducción del 80 %.

Con una reducción del 80 %, la diagonal mayor mide 15 · 0,8 = 12 cm y la diagonal menor mide 5 · 0,8 = 4 cm.

SOLUCIONES PÁG. 253

9 Si las rectas que cortan a *r* y *r*' son paralelas entre sí, halla la longitud del segmento $\overline{BC}$, sabiendo que las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son, respectivamente, 2,8 cm, 2,5 cm y 4 cm.

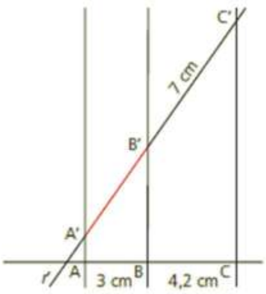


Se aplica el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{B'C'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \frac{2,8}{2,5} = 4,48 \Rightarrow \overline{BC} = 4,48 \text{ cm}$$

10 Halla la longitud del segmento $\overline{A'B'}$.

Se aplica el teorema de Tales:



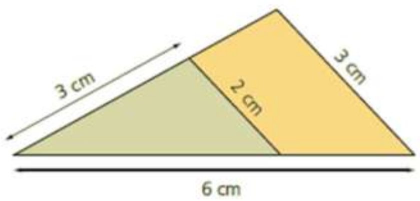
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{A'B'} = 3 \cdot \frac{7}{4,2} = 5 \Rightarrow \overline{A'B'} = 5 \text{ cm}$$

11 Investiga acerca de la figura de Tales de Mileto y las aplicaciones que de sus conocimientos hizo en su vida.

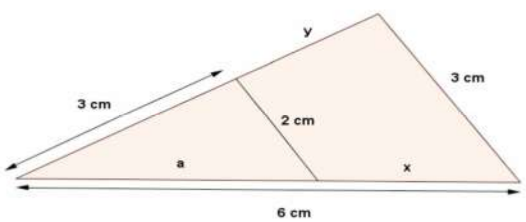
Respuesta abierta.

12 Actividad resuelta.

13 Halla el perímetro de cada uno de los triángulos formados en la siguiente figura:



Se consideran las incógnitas:



Son triángulos en posición de Tales, es decir, los segmentos mantienen una proporción: $\frac{3}{3+y} = \frac{a}{6} = \frac{2}{3}$

$$\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{3+y}=\frac{a}{6}\Rightarrow\frac{3}{3+y}=\frac{4}{6}\Rightarrow 18=4\cdot(3+y)\Rightarrow y=1{,}5\text{ cm}$$

$a + x = 6 \Rightarrow 4 + x = 6 \Rightarrow x = 2$ cm

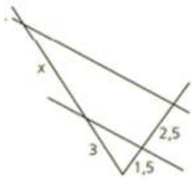
Se calcula el perímetro:

$P_{\text{pequeño}} = 3 + 4 + 2 = 9$ cm

$P_{\text{grande}} = 4{,}5 + 3 + 6 = 13{,}5$ cm

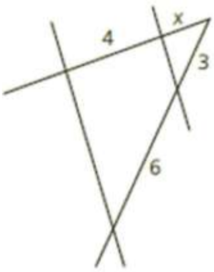
14 Calcula las longitudes de los lados desconocidos en las siguientes figuras, cuyas medidas vienen dadas en centímetros:

a.



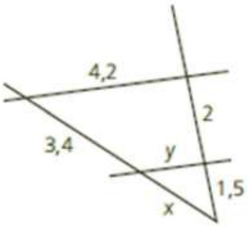
$$\frac{3}{1{,}5}=\frac{x}{2{,}5}\Rightarrow x=5\text{ cm}$$

b.



$$\frac{x}{3}=\frac{x+4}{3+6}\Rightarrow x=2\text{ cm}$$

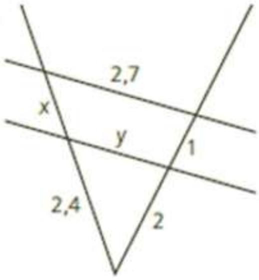
c.



$$\frac{x}{x+3{,}4}=\frac{1{,}5}{1{,}5+2}\Rightarrow 2x-5{,}1=0\Rightarrow x=2{,}55\text{ cm}$$

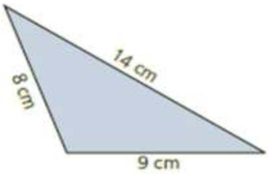
$$\frac{1{,}5}{1{,}5+2}=\frac{y}{4{,}2}\Rightarrow y=1{,}8\text{ cm}$$

d.



$$\frac{2,4}{2}=\frac{2,4+x}{2+1}\Rightarrow 2x-2,4=0\Rightarrow x=1,2\ \text{cm}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{y}{2,7}\Rightarrow y=1,8\ \text{cm}$$

15 A partir del triángulo de la figura, dibuja en tu cuaderno otro triángulo que esté en posición de Tales con él, con una razón de semejanza de 0,75.



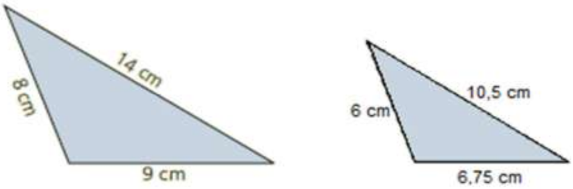
Se establece la relación de los dos triángulos en posición de Tales, siendo el triángulo semejante menor que el original:

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{9}=\frac{z}{14}=0,75$$

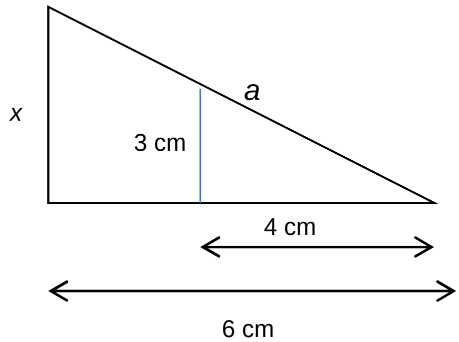
$$\frac{x}{8}=0,75\Rightarrow x=6\ \text{cm}$$

$$\frac{y}{9}=0,75\Rightarrow y=6,75\ \text{cm}$$

$$\frac{z}{14}=0,75\Rightarrow z=10,5\ \text{cm}$$



16 Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm, respectivamente. A continuación, dibuja otro en posición de Tales cuyo cateto mayor mida 6 cm.



a. ¿Cuál es la razón de semejanza de ambos triángulos?

La relación de semejanza entre los dos triángulos es: $r = \frac{6}{4} = 1{,}5$

b. ¿Cuál es el perímetro del nuevo triángulo?

Mediante la razón de semejanza se halla el cateto menor del triángulo mayor:

$r = \frac{x}{3} = 1{,}5 \Rightarrow x = 4{,}5 \text{ cm}$

Se aplica directamente el teorema de Pitágoras al nuevo triángulo:

$4{,}5^2 + 6^2 = a^2 \Rightarrow a = 7{,}5$ cm

El perímetro es: $P = 4{,}5 + 6 + 7{,}5 = 18$ cm

c. Calcula el área de ambos triángulos.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \Rightarrow A = 6 \text{ cm}^2$$

$$A' = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A' = \frac{6 \cdot 4{,}5}{2} = 13{,}5 \Rightarrow A' = 13{,}5 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 255

17 La longitud de los lados de un pentágono son 1,5 cm, 2,3 cm, 4 cm, 0,9 cm y 3,2 cm, respectivamente. Calcula la longitud de los lados de un pentágono semejante cuya razón de semejanza es $r = \frac{5}{2}$.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos del pentágono:

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{y}{2{,}3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{0{,}9} = \frac{v}{3{,}2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 3{,}75 \text{ cm}$$

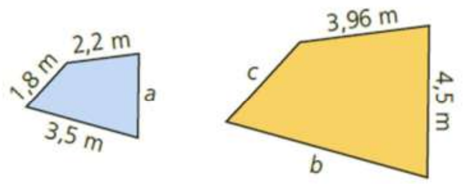
$$\frac{y}{2{,}3} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 5{,}75 \text{ cm}$$

$\frac{z}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow z = 10 \text{ cm}$

$\frac{t}{0{,}9} = \frac{5}{2} \Rightarrow t = 2{,}25 \text{ cm}$

$\frac{v}{3{,}2} = \frac{5}{2} \Rightarrow v = 8 \text{ cm}$

18 Halla la longitud de los lados desconocidos para que ambos cuadriláteros sean semejantes.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los cuadriláteros:

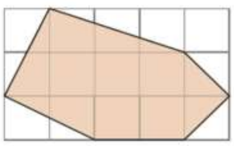
$\frac{4{,}5}{a} = \frac{b}{3{,}5} = \frac{c}{1{,}8} = \frac{3{,}96}{2{,}2} = 1{,}8$

$\frac{4{,}5}{a} = 1{,}8 \Rightarrow a = 2{,}5 \text{ m}$

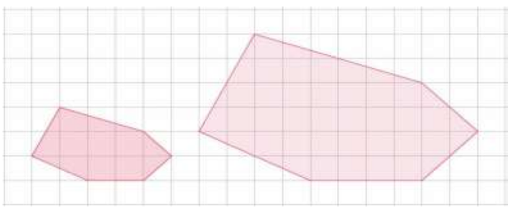
$\frac{b}{3{,}5} = 1{,}8 \Rightarrow b = 6{,}3 \text{ m}$

$\frac{c}{1{,}8} = 1{,}8 \Rightarrow c = 3{,}24 \text{ m}$

19 Dibuja en tu cuaderno un polígono semejante al de la figura con una razón de semejanza r = 2.



Se puede dibujar el polígono semejante sobre la misma cuadrícula multiplicando por 2 la longitud de cada lado.



20 Los lados de un triángulo miden 8 dm, 12 dm y 6 dm, respectivamente. Halla el perímetro de un triángulo semejante a este cuya razón de semejanza sea $r = \frac{3}{4}$.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los triángulos:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 6 \text{ dm}$$

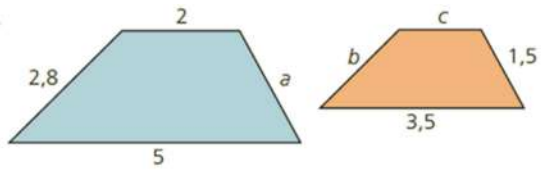
$$\frac{b}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = 9 \text{ dm}$$

$$\frac{c}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = 4{,}5 \text{ dm}$$

Se calcula el perímetro: $P = 6 + 9 + 4{,}5 = 19{,}5$ dm

21 Determina la longitud de los lados desconocidos de estas figuras semejantes, cuyas medidas vienen dadas en centímetros:

a.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

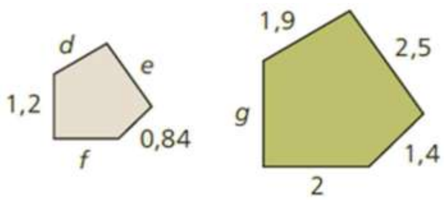
$$\frac{1{,}5}{a} = \frac{b}{2{,}8} = \frac{c}{2} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$$

$$\frac{1{,}5}{a} = 0{,}7 \Rightarrow a = 2{,}14 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{2{,}8} = 0{,}7 \Rightarrow b = 1{,}96 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{2} = 0{,}7 \Rightarrow c = 1{,}4 \text{ cm}$$

b.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{1{,}9}{d} = \frac{2{,}5}{e} = \frac{2}{f} = \frac{g}{1{,}2} = \frac{1{,}4}{0{,}84}$$

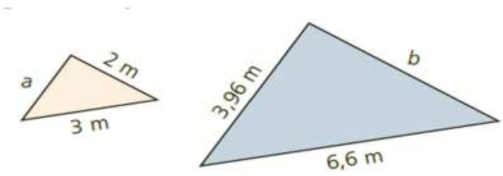
$$\frac{1,9}{d} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow d = 1,14 \text{ cm}$$

$$\frac{2,5}{e} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow e = 1,5 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{f} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow f = 1,2 \text{ cm}$$

$$\frac{g}{1,2} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow g = 2 \text{ cm}$$

22 Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos semejantes:



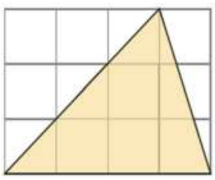
Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{3,96}{a} = \frac{b}{2} = \frac{6,6}{3}$$

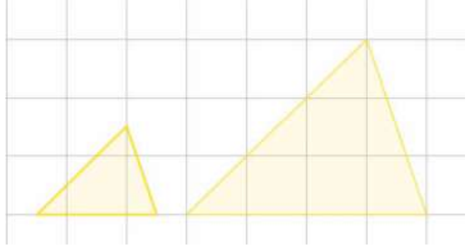
$$\frac{3,96}{a} = \frac{6,6}{3} \Rightarrow a = 1,8 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{6,6}{3} \Rightarrow b = 4,4 \text{ m}$$

23 Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante al siguiente, con una razón de semejanza $r = \frac{1}{2}$:



Se puede dibujar el triángulo semejante sobre la misma cuadrícula dividiendo entre 2 la longitud de cada lado.



24 Indica si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:

a. 8 m, 12 m, 15 m y 10 m, 15 m, 19 m.

No son semejantes, porque sus lados homólogos no son proporcionales:

$$\frac{10}{8} = \frac{15}{12} \neq \frac{19}{15}$$

b. 25°, 90° y 65°, 25°.

Sí son semejantes, porque los ángulos del primero son:

25º, 90º y 180º – 25º – 90º = 65º

y los segundo son:

65º, 25º y 180º – 65º – 25º = 90º

Es decir, en los dos triángulos los tres ángulos son iguales, 25º, 65º y 90º.

c. 60°, 60° y 4 m, 4 m, 4 m.

Los dos triángulos son equiláteros (el primero tiene los tres ángulos iguales, 60º, 60º y 180º – 60º – 60º = 60º; el segundo tiene los tres lados iguales) y por tanto son semejantes.

25 Razona si los siguientes pares de triángulos son semejantes:

a. Dos triángulos equiláteros distintos.

Sí, porque tienen todos los ángulos iguales.

b. Dos triángulos isósceles distintos.

No, porque pueden tener los tres ángulos distintos.

c. Dos triángulos acutángulos que tengan un ángulo igual.

No, porque pueden tener los otros dos ángulos distintos.

d. Dos triángulos isósceles cuyas parejas de lados iguales forman el mismo ángulo.

Sí, porque tienen los tres ángulos iguales, ya que cada uno de los otros dos ángulos valen la mitad del suplementario del dado.

26 Dos cuadriláteros tienen sus cuatro lados iguales cada uno de ellos y cumplen, además, que sus lados correspondientes mantienen entre sí una razón de semejanza r = 1,5. Con estas indicaciones, ¿se puede asegurar que son semejantes? Razona tu respuesta.

No, porque se puede tratar de un cuadrado y un rombo, que no son semejantes.

SOLUCIONES PÁG. 257

27 Las medidas de un triángulo son 4 dm, 6 dm y 9 dm, y las de otro triángulo semejante a él son 6 dm, 9 dm y 13,5 dm.

a. Obtén la razón de semejanza de ambos triángulos.

La razón de semejanza es $r = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{13,5}{9} = 1,5$

b. Calcula el perímetro de los dos triángulos.

$P = 4 + 6 + 9 = 19$ dm

$P' = 6 + 9 + 13,5 = 28,5$ dm

28 De dos triángulos semejantes se conocen las longitudes de un par de lados homólogos: 2,8 cm y 7 cm, respectivamente. Si el perímetro del triángulo menor es de 9,8 cm y el área vale 4,19 cm^2:

a. ¿Cuál es el perímetro del otro triángulo?

La razón de semejanza es $r = \frac{7}{2,8} = 2,5$. Como esta razón de semejanza coincide con la razón de semejanza entre perímetros:

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = 2,5 \cdot 9,8 = 24,5 \Rightarrow P' = 24,5$ cm

b. ¿Cuál es su área?

La razón de semejanza entre áreas es $\frac{A'}{A} = r^2$, de modo que:

$A' = A \cdot r^2 \Rightarrow A' = 4,19 \cdot 2,5^2 = 26,19 \Rightarrow A' = 26,19$ cm^2

29 De un cuadrilátero se conocen sus lados, que miden 3 m, 4 m, 6 m y 7 m, respectivamente, y de otro cuadrilátero semejante a él se sabe que su perímetro mide 46 m.

a. Halla la razón de semejanza de ambos cuadriláteros.

Se calcula el perímetro del cuadrilátero: $P = 3 + 4 + 6 + 7 = 20 \Rightarrow P = 20$ m

Se comparan los perímetros para hallar la razón de semejanza:

$$r = \frac{P'}{P} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2,3$$

b. ¿Cuánto miden los lados del segundo cuadrilátero?

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = \frac{d}{7} = 2,3$$

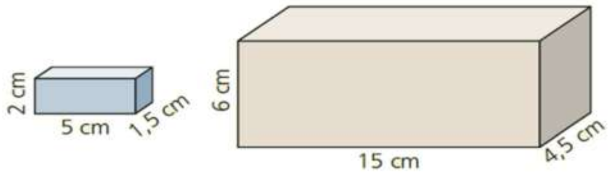
$$\frac{a}{3} = 2,3 \Rightarrow a = 6,9 \text{ m}$$

$$\frac{b}{4} = 2{,}3 \Rightarrow b = 9{,}2 \text{ m}$$

$$\frac{c}{6} = 2{,}3 \Rightarrow c = 13{,}8 \text{ m}$$

$$\frac{d}{7} = 2{,}3 \Rightarrow d = 16{,}1 \text{ m}$$

30 Dados estos prismas semejantes, ¿qué relación hay entre su razón de semejanza y la de sus volúmenes?



Se halla la razón de semejanza entre los prismas:

$$\text{r} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = \frac{15}{5} = \frac{6}{2} = 3$$

Se halla la razón entre volúmenes:

$$\frac{V'}{V} = \text{r}^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = 3^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = 27$$

31 Los perímetros de dos hexágonos semejantes miden, respectivamente, 43 cm y 150,5 cm, y el área del primer hexágono, 130 cm^2.

a. Halla la razón de semejanza entre los hexágonos.

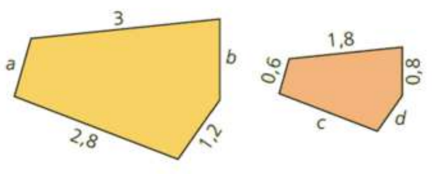
$$\text{r} = \frac{P'}{P} = \frac{150{,}5}{43} = 3{,}5$$

b. Calcula el área del segundo hexágono.

La razón de semejanza entre áreas es $\frac{A'}{A} = \text{r}^2$, de modo que:

$A' = A \cdot \text{r}^2 \Rightarrow A' = 130 \cdot 3{,}5^2 = 1\,592{,}5 \text{ cm}^2$

32 Dados estos dos polígonos semejantes, cuyas unidades están dadas en centímetros, halla:



a. Los lados desconocidos.

Se halla la razón de semejanza entre los polígonos:

$$\mathrm{r} = \frac{0,6}{a} = \frac{0,8}{b} = \frac{c}{2,8} = \frac{d}{1,2} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

$$\frac{0,6}{a} = 0,6 \Rightarrow a = 1\ \text{cm}$$

$$\frac{0,8}{b} = 0,6 \Rightarrow b = 1,3\ \text{cm}$$

$$\frac{c}{2,8} = 0,6 \Rightarrow c = 1,68\ \text{cm}$$

$$\frac{d}{1,2} = 0,6 \Rightarrow d = 0,72\ \text{cm}$$

b. Los perímetros de ambos polígonos.

Los perímetros se calculan sumando los lados de cada polígono:

P = 1 + 2,8 + 1,2 + 1,3 + 3 = 9,3 cm

P' = 0,6 + 1,68 + 0,72 + 0,8 + 1,8 = 5,60 cm

33 De una serie de triángulos se indican a continuación su perímetro y su área. ¿Cuáles de ellos son semejantes?

a. *P* = 12 cm, *A* = 24 cm²

b. *P* = 24 cm, *A* = 256 cm²

c. *P* = 18 cm, *A* = 54 cm²

d. *P* = 15 cm, *A* = 100 cm²

Se busca la razón de semejanza entre los triángulos y se observa que:

- $\mathrm{r} = \frac{P_{a.}}{P_{c.}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$; $\mathrm{r}^2 = \frac{A_{a.}}{A_{c.}} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^3}$, es decir, los triángulos a. y c. son semejantes.
- $\mathrm{r} = \frac{P_{b.}}{P_{d.}} = \frac{24}{15} = 1,6$; $\mathrm{r}^2 = \frac{A_{b.}}{A_{d.}} = \frac{256}{100} = 2,56 = 1,6^2$, es decir, los triángulos b. y d. son semejantes.

34 El lado de un cuadrado mide 5 cm, y el lado de otro cuadrado es el cuádruple. Calcula:

a. La razón entre sus perímetros.

La razón entre sus perímetros es: $\mathrm{r} = \frac{P'}{P} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{4\cdot(5+5+5+5)}{5+5+5+5} = 4$, igual que entre sus lados.

b. La razón entre sus áreas.

La razón entre sus áreas es 4^2 = 16.

SOLUCIONES PÁG. 259

35 Visita estas páginas en Internet. En una de ellas adquirirás más conocimientos sobre la interpretación de mapas y planos y en la otra realizarás un repaso de lo aprendido acerca de la semejanza a través de las actividades propuestas.

http://conteni2.educarex.es/mats/101109/contenido/

http://conteni2.educarex.es/mats/101069/contenido/

Respuesta abierta.

36 En un mapa, la distancia entre las ciudades de Tallin y Helsinki es de 16 cm. Si en la realidad estas dos ciudades distan entre sí 80 km, ¿cuál es la escala con la que está elaborado el mapa?

La razón de semejanza entre la distancia real y la distancia en el mapa es:

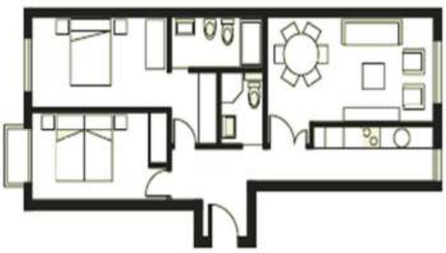
$$\frac{80\text{ km}}{16\text{ cm}} = \frac{80\,000\text{ m}}{0{,}16\text{ m}} = 500\,000$$

Por tanto, la escala es 1:500 000

37 En grupos de tres elaborad un plano del aula. Para ello elegid una escala adecuada y medid las dimensiones del aula para representarla en vuestros cuadernos.

Respuesta abierta.

38 En el siguiente plano de un piso realizado con una escala 1:300, toma las medidas necesarias para contestar a las siguientes preguntas:



1 : 300

a. ¿Qué dimensiones reales tiene el salón?

El salón mide en el plano 1,8 cm × 1 cm, como la escala es 1:300, en realidad medirá:

0,018 m · 300 = 5,4 m

0,01 m · 300 = 3 m, es decir, el salón mide realmente 5,4 × 3 m

b. Se quiere representar en el plano una mesa en el salón cuyas dimensiones son 1 m × 0,50 m. ¿Cuánto medirá en el plano?

La mesa medirá:

$$\frac{1}{300} = 3,33 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0,33\ \text{cm}$$

$$\frac{0,5}{300} = 1,7 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0,17\ \text{cm}$$

Es decir, la mesa medirá sobre el plano 0,33 cm × 0,17 cm

39 En el plano de un piso realizado a una escala de 1:200, la cocina mide 3 cm × 2 cm. Calcula:

a. Las dimensiones de la cocina en la realidad.

Como la escala es 1:200, en realidad medirá:

0,03 m · 200 = 6 m

0,02 m · 200 = 4 m

Es decir, el salón mide realmente 6 × 4 m

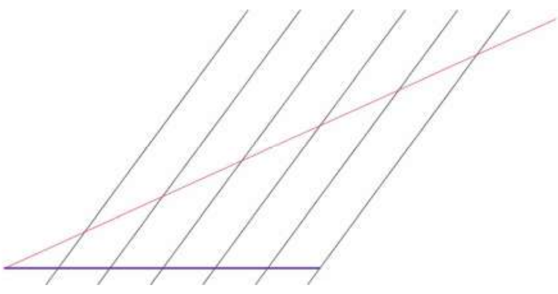
b. La superficie de la cocina en el plano y en la realidad.

La superficie que tendrá la cocina en el plano es $A = 3 \cdot 2 = 6\ \text{cm}^2$, y en la realidad, $A' = 6 \cdot 4 = 24\ \text{m}^2$.

40 Actividad resuelta.

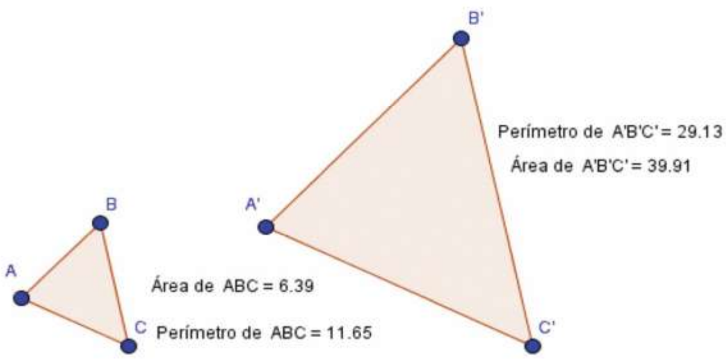
41 Dibuja en tu cuaderno un segmento de 8 cm y divídelo en 6 partes iguales utilizando el teorema de Tales.

Se trata de apoyarse en un segmento dividido en 6 partes iguales y trazar paralelas entre los extremos de los dos segmentos. Por el teorema de Tales, los tramos entre las paralelas son proporcionales a las seis partes iguales marcadas en la recta auxiliar y, por tanto, serán también iguales entre sí.



SOLUCIONES PÁG. 260 - HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

1 Dibuja dos triángulos semejantes según una razón de semejanza r = 2,5. Comprueba que sus perímetros tienen la misma razón de semejanza, y que la razón entre sus áreas es el cuadrado de dicha razón.



La relación entre perímetros es: $\frac{P'}{P} = \frac{29{,}13}{11{,}65} = 2{,}5 = \text{r}$.

La relación entre áreas es: $\frac{A'}{A} = \frac{39{,}91}{6{,}39} = 6{,}25 = \text{r}^2$

SOLUCIONES PÁG. 261 - APRENDO A APRENDER

1 ¿Qué son los ángulos homólogos en dos figuras semejantes?

Son los ángulos que se corresponden en ambas figuras, y tienen la misma amplitud por ser semejantes.

2 ¿En las figuras semejantes puede variar la forma o el tamaño?

Solo puede variar el tamaño.

3 Si la razón de semejanza es mayor que la unidad, ¿cómo es la figura semejante respecto a la inicial?

Es una figura ampliada.

4 Cuando la figura semejante se obtiene a través de una reducción de la original, ¿cómo es la razón de semejanza?

Es menor que la unidad.

5 Enuncia el teorema de Tales.

Si dos rectas secantes, *r* y *r'*, son cortadas por rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección en la recta *r* son proporcionales a los determinados por los puntos de intersección correspondientes en la recta *r'*.

6 ¿Cuándo dos triángulos están en posición de Tales?

Deben tener todos sus ángulos iguales y los lados correspondientes a cada uno proporcionales.

7 **¿Cuál es el valor de la razón de semejanza que hay entre dos polígonos si uno de ellos ha aumentado en un 175 % con respecto al otro?**

r = 1,75

8 **¿Qué deben cumplir los elementos de dos polígonos semejantes?**

Debe cumplir que los lados homólogos de ambos polígonos son proporcionales y los ángulos homólogos son iguales.

9 **¿Cuáles son los criterios de semejanza para triángulos rectángulos?**

Los dos criterios son:

- Tienen un ángulo agudo igual.
- Tienen dos de sus lados homólogos proporcionales.

10 **¿Se puede asegurar que dos triángulos rectángulos isósceles son siempre semejantes?**

Sí, pues los ángulos en ambos triángulos son 45º, 45º y 90º.

11 **¿Qué cumple la relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes?**

Se cumple que coincide con la razón de semejanza de los lados de los polígonos.

12 **¿Y la razón entre las áreas?**

Se cumple que es el cuadrado de la razón de semejanza de los lados de los polígonos.

13 **¿Qué diferencia hay entre un mapa y un plano?**

En el mapa se representa una parte o toda la superficie terrestre y se emplea una escala menor que en el plano. Mientras que el plano se emplea para representar realidades diferentes a la superficie terrestre.

14 **¿Qué es una representación a escala?**

Es una representación gráfica de la realidad manteniendo las proporciones en las distancias.

15 **Explica el significado de la escala 1:1 000.**

La escala 1:1 000 significa que una determinada distancia en el mapa mide 1 000 veces más en la realidad y en las mismas unidades.

16 **Dos octógonos regulares tienen lados de distintas longitudes; ¿se puede afirmar que son semejantes?**

Sí, porque los ángulos homólogos son iguales y los lados son proporcionales.

17 **Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 262 – REPASO FINAL

RAZÓN Y SEMEJANZA

1 **Una fotocopiadora reproduce figuras semejantes ampliando o reduciendo la original. Se hace una fotocopia de una imagen encerrada en un rectángulo que mide 20 cm × 8 cm.**

a. **Halla las dimensiones de rectángulo si en la fotocopiadora se selecciona ampliar un 150 %.**

Se establece la relación de semejanza:

$$r = \frac{150}{100} = 1,5 \Rightarrow 1,5 = \frac{a}{20} = \frac{b}{8}$$

$$1,5 = \frac{a}{20} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$1,5 = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 12 \text{ cm}$$

Las dimensiones son 30 cm × 12 cm.

b. **Calcula las dimensiones del rectángulo si se selecciona reducir un 75 %.**

Se establece la relación de semejanza:

$$r = \frac{75}{100} = 0,75 \Rightarrow 0,75 = \frac{a}{20} = \frac{b}{8}$$

$$0,75 = \frac{a}{20} \Rightarrow a = 15 \text{ cm}$$

$$0,75 = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 6 \text{ cm}$$

Las dimensiones son 15 cm × 6 cm.

c. **¿Qué porcentaje se ha seleccionado si las dimensiones del nuevo rectángulo son 24 cm × 9,6 cm?**

Se establece la relación de semejanza:

$$\frac{r}{100} = \frac{24}{20} = \frac{9,6}{8} = 1,2 \Rightarrow r = 120\text{, r } = 120\%$$

Se ha seleccionado un porcentaje de 120 %.

2 Irene ha hecho una fotografía a su perro, que mide 1,14 m.

a. Si en la foto tiene una altura de 3 cm, ¿cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la foto?

Se establece la relación de semejanza: $r = \frac{1,14}{0,03} = 38$

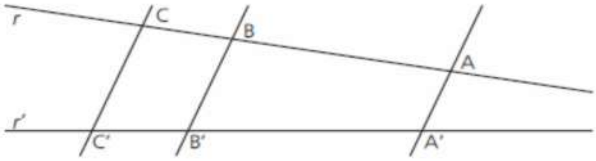
b. Si en la foto también aparece su hermana Julia con una altura de 4 cm, ¿cuánto mide realmente?

$r = 38 = \frac{h}{0,04} \Rightarrow h = 1,52$ m. Julia mide 1,52 m

TEOREMA DE TALES

3 Las rectas que cortan a *r* y *r* ' son paralelas entre sí. Halla la longitud del segmento $\overline{B'C'}$ sabiendo que las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{BC}$ son, respectivamente, 2,7 cm, 2,9 cm y 1,5 cm.

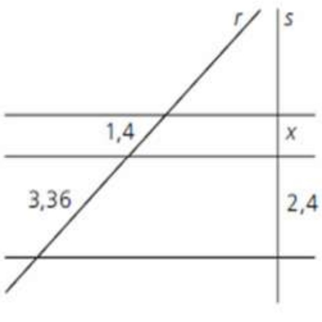
Se realiza un esquema para colocar las rectas y los segmentos:



Se establece la relación de semejanza según el teorema de Tales:

$$r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2,9}{2,7} = 1,07 \Rightarrow \overline{B'C'} = 1,61 \text{ cm}$$

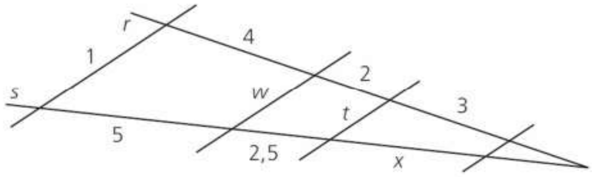
4 Si las rectas que cortan a *r* y *s* son paralelas, halla la longitud *x*.



Se establece la relación de semejanza según el teorema de Tales:

$$r = \frac{x}{1,4} = \frac{2,4}{3,36} \Rightarrow x = 1$$

5 Si las rectas que cortan a *r* y *s* son paralelas, halla la longitud de *x*, *w* y *t*.



Se toman los segmentos proporcionales para averiguar longitudes:

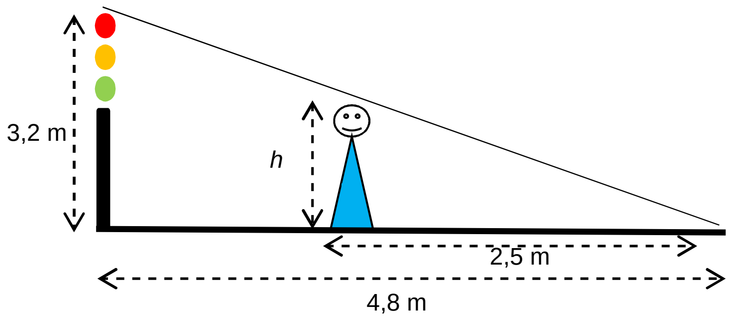
$$\frac{x}{3}=\frac{2,5}{2}\Rightarrow x=3,75$$

$$\frac{w}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow w=0,5$$

$$\frac{t}{w}=\frac{3}{5}\Rightarrow \frac{t}{0,5}=0,6\Rightarrow t=0,3$$

6 La sombra de Hugo tiene una longitud de 2,5 m. En ese lugar y en ese preciso momento del día un semáforo que tiene una altura de 3,2 m produce una sombra de 4,8 m de longitud. ¿Cuál es la estatura de Hugo?

Se realiza un esquema para entender la situación:

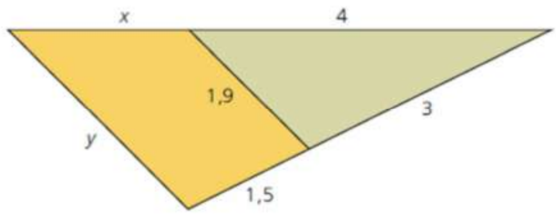


Se trata de dos triángulos en posición de Tales, luego sus lados son semejantes, es decir,

$$\frac{2,5}{4,8}=\frac{h}{3,2}\Rightarrow h=1,67$$

Hugo mide 1,67 m.

7 Halla la longitud de los segmentos desconocidos.



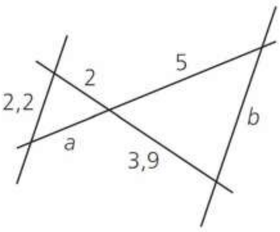
Se trata de dos triángulos en posición de Tales, luego sus lados son semejantes, es decir,

$$\frac{x+4}{4}=\frac{1,5+3}{3}\Rightarrow \frac{x+4}{4}=\frac{4,5}{3}\Rightarrow x=2$$

$$\frac{y}{1,9}=\frac{1,5+3}{3}\Rightarrow\frac{y}{1,9}=\frac{4,5}{3}\Rightarrow y=2,85$$

8 Calcula el valor de cada uno de los segmentos cuya medida se desconoce.

a.

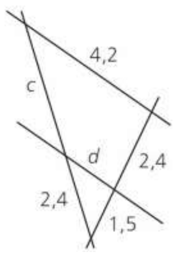


Se toman los segmentos proporcionales para averiguar longitudes, teniendo en cuenta que se forman dos triángulos opuestos por el vértice. Los segmentos proporcionales son los lados prolongados.

$$\frac{a}{2}=\frac{5}{3,9}\Rightarrow a=2,56$$

$$\frac{b}{2,2}=\frac{3,9}{2}\Rightarrow b=4,29$$

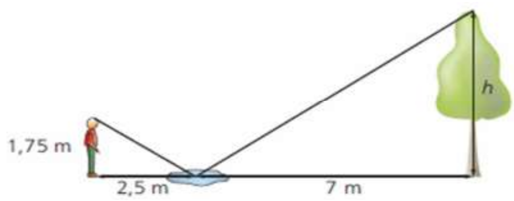
b.



$$\frac{c}{2,4}=\frac{2,4}{1,5}\Rightarrow c=3,84$$

$$\frac{d}{4,2}=\frac{1,5}{1,5+2,4}\Rightarrow d=1,62$$

9 Rodrigo tiene delante un árbol cuya copa se ve reflejada en un charco que hay entre medias. Si Rodrigo mide 1,75 m, calcula la altura del árbol teniendo en cuenta las distancias recogidas en la siguiente figura:

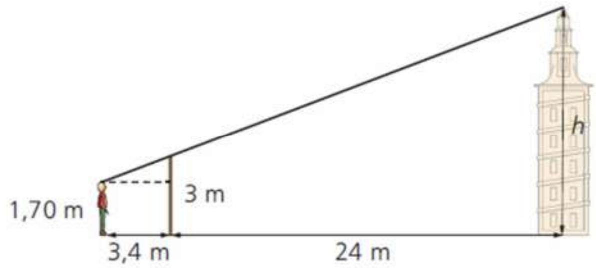


Se plantea la proporción entre los lados de los triángulos semejantes:

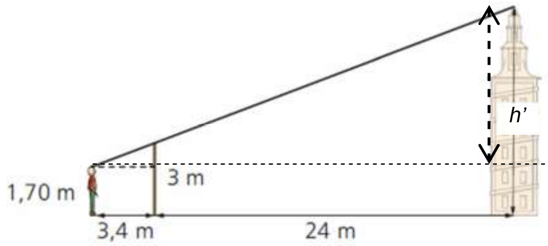
$$\frac{h}{1,75}=\frac{7}{2,5}\Rightarrow h=4,9$$

El árbol mide 4,9 m.

10 Sergio quiere calcular la altura de la torre del campanario de su pueblo. Para ello, clava una vara en el suelo de forma que sobresalga 3 m y se sitúa de tal modo que en su visual al campanario coincidan los extremos del listón y de la torre. Si Sergio ha tomado las medidas indicadas en la imagen, halla la altura del campanario.



Se plantea la proporción de los lados de los lados semejantes:



$$\frac{h'}{24+3,4}=\frac{3-1,7}{3,4}\Rightarrow h'=10,48$$

$h = h' + 1,7 = 10,48 + 1,70 = 12,18$

El campanario mide 12,18 m

SOLUCIONES PÁG. 263

SEMEJANZA DE POLÍGONOS. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

11 Halla la longitud de los lados de un pentágono semejante a otro cuyos lados miden 2 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm y 14 cm, con una razón de semejanza r = 2,5.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los pentágonos:

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=\frac{d}{10}=\frac{e}{14}=2,5$$

$$\frac{a}{2}=2,5\Rightarrow a=5 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{5}=2,5\Rightarrow b=12,5 \text{ cm}$$

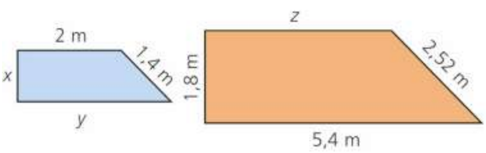
$$\frac{c}{6}=2,5\Rightarrow c=15 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{10}=2,5\Rightarrow d=25 \text{ cm}$$

$$\frac{e}{14}=2,5\Rightarrow e=35 \text{ cm}$$

12 Halla la longitud de los lados desconocidos en estos polígonos semejantes:

a.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

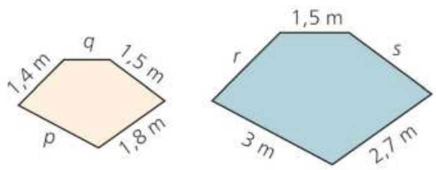
$$\frac{1,8}{x}=\frac{5,4}{y}=\frac{z}{2}=\frac{2,52}{1,4}=1,8$$

$$\frac{1,8}{x}=1,8\Rightarrow x=1\text{ m}$$

$$\frac{5,4}{y}=1,8\Rightarrow y=3\text{ m}$$

$$\frac{z}{2}=1,8\Rightarrow z=3,6\text{ m}$$

b.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{1,5}{q}=\frac{r}{1,4}=\frac{3}{p}=\frac{s}{1,5}=\frac{2,7}{1,8}=1,5$$

$$\frac{1,5}{q}=1,5\Rightarrow q=1\text{ m}$$

$$\frac{r}{1,4}=1,5\Rightarrow r=2,1\text{ m}$$

$$\frac{3}{p}=1,5\Rightarrow p=2\text{ m}$$

$$\frac{s}{1,5}=1,5\Rightarrow s=2,25\text{ m}$$

13 Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

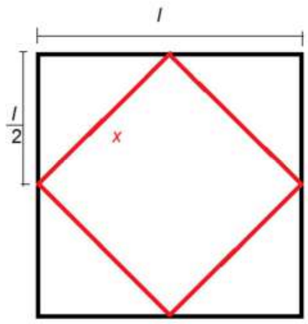
a. Dos triángulos rectángulos son siempre semejantes.
Falso, pues puede que solo tengan un ángulo igual.

b. El rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 7 cm es semejante a otro de 11,5 cm y 16,1 cm de lados.
Verdadero, pues: $\text{r}=\frac{11,5}{5}=\frac{16,1}{7}=2,3$

c. La razón entre las alturas de dos triángulos semejantes no es igual a la razón de semejanza de los triángulos.
Falso. Sí se mantiene la razón, pues al trazar la altura se crean triángulos semejantes.

d. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado, se obtiene otro que no es semejante al anterior.

Falso, son semejantes con razón $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que es la relación entre los lados del cuadrado semejante y del original:



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del lado del cuadrado pequeño:

$$x = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{l}{2}\sqrt{2}$$

Se aplica el teorema de Tales para hallar la razón de proporcionalidad:

$$r = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14 Dos cuadriláteros tienen sus cuatro ángulos iguales cada uno de ellos. Con estas condiciones, ¿se puede asegurar que son semejantes? Razona tu respuesta.

No, porque pueden ser un cuadrado y un rectángulo, que no son semejantes.

15 Indica, razonando tu respuesta, todos los triángulos semejantes que aparecen en el siguiente dibujo:

Hay tres triángulos semejantes: BAC, AMC y BMA.

Tienen dos lados homólogos proporcionales, y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

16 Si se toman los puntos medios de los dos catetos de un triángulo rectángulo y se unen con el vértice del ángulo recto, se forma otro triángulo. ¿Es este último semejante al triángulo rectángulo inicial? Razona tu respuesta.

Sí es semejante, puesto que están en posición de Tales.

17 Demuestra si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:

a. 6 m, 10 m, 14 m y 15 m, 25 m, 35 m

Sí, porque los lados son proporcionales, con r = 2,5:

$$\frac{6}{15}=\frac{10}{25}=\frac{14}{35}$$

b. 40°, 60° y 80°, 60°

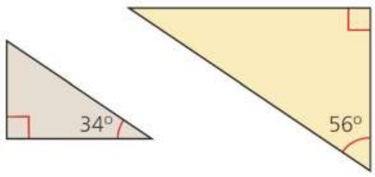
Sí, porque los ángulos son iguales, 40º, 60º y 80º.

c. 3 cm, 4 cm y 5 cm y 45°, 45°

No, porque los dos son triángulos rectángulos, pero uno de ellos es isósceles (tiene los tres lados iguales) y el otro no.

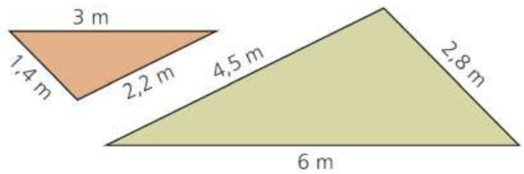
18 Indica si estos triángulos son semejantes:

a.



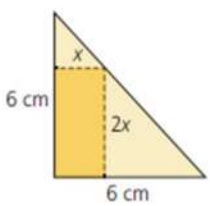
Sí, porque los ángulos son iguales, 34º, 56º y 90º.

b.



No, porque los lados no son proporcionales: $\frac{6}{3}=\frac{2{,}8}{1{,}4}\neq\frac{4{,}5}{2{,}2}$

19 En un triángulo rectángulo isósceles se ha inscrito un rectángulo cuya altura es el doble que la base. Halla el área del rectángulo.



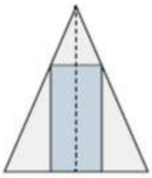
Se han formado dos triángulos semejantes, uno de ellos es el original y el otro tiene altura 2*x* y base 6 – *x*.

Se establece la proporción entre los triángulos semejantes:

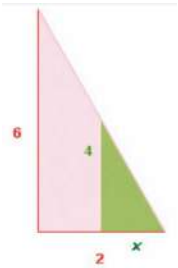
$$\frac{6}{6}=\frac{2x}{6-x}\Rightarrow x=2\text{ cm}$$

El área es: $A = x \cdot 2x \Rightarrow A = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow A = 8\text{ cm}^2$

20 En un triángulo isósceles de 4 m de base y 6 m de altura se inscribe un rectángulo de 4 m de altura. Halla el área del rectángulo.



Resultan dos triángulos semejantes, como se ve en la figura:

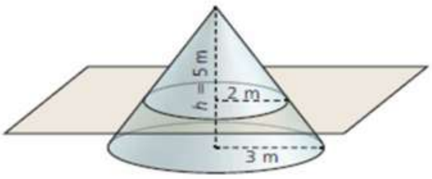


Se establece la proporción entre los triángulos semejantes:

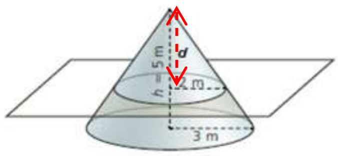
$\frac{6}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 1{,}3 \text{ m}$

Las dimensiones del rectángulo son 1,4 × 4, así que el área es: A = 5,6 m^2

21 En un cono de 3 m de radio y 5 m de altura se ha realizado un corte por un plano perpendicular a la altura, generando una sección circular de 2 m de radio. Halla la distancia desde el centro de esta sección al vértice del cono.



Se establece la proporción entre los triángulos semejantes: $\frac{5}{3} = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 3{,}3 \text{ m}$

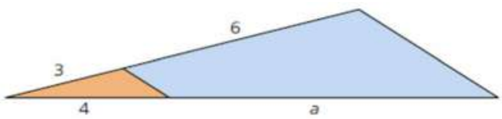


La distancia desde el centro al vértice del cono es 3,3 m.

SOLUCIONES PÁG. 264

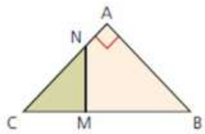
22 Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a. El valor de *a* es 8.



Cierto, porque $\frac{4}{3} = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 8$

b. Los triángulos ABC y MCN son semejantes.



Cierto. Los dos triángulos tienen los tres ángulos iguales.

PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS SEMEJANTES

23 Los lados de dos pentágonos regulares miden, respectivamente, 4 cm y 9 cm.

a. ¿Son semejantes?
Sí, pues sus ángulos homólogos son iguales y sus lados proporcionales.

b. En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza?

$$r = \frac{9}{4} = 2,25$$

c. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

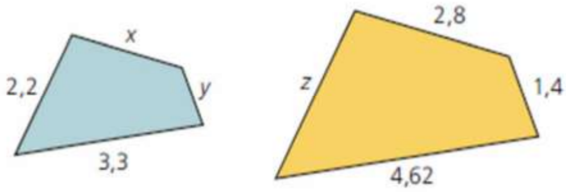
$P = 4 \cdot 5 = 20$

$P' = 9 \cdot 5 = 45$

$$r = \frac{P'}{P} \Rightarrow r = \frac{45}{20} = 2,25$$

Es la misma.

24 En la imagen aparecen dos cuadriláteros semejantes con las medidas en centímetros. Halla:



a. Los lados desconocidos.
Se establece la proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{2,8}{x} = \frac{1,4}{y} = \frac{z}{2,2} = \frac{4,62}{3,3} = 1,4$$

$$\frac{2,8}{x} = 1,4 \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{1,4}{y} = 1,4 \Rightarrow y = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{2,2} = 1,4 \Rightarrow z = 3,08 \text{ cm}$$

b. Los perímetros de ambos polígonos.

$P = 2 + 1 + 3,3 + 2,2 = 8,5$ cm

$P' = 2,8 + 1,4 + 4,62 + 3,08 = 11,9$ cm.

Se comprueba también que $P' = r \cdot P = 1,4 \cdot 8,5 = 11,9$

25 El perímetro de un cuadrilátero es 24 dm, y su área es 16 dm^2. Si redujéramos el cuadrilátero usando $\frac{1}{4}$ como razón de semejanza:

a. Halla el perímetro del nuevo cuadrilátero.

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \Rightarrow P' = 6 \text{ dm}$

b. Calcula su área.

$A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1 \Rightarrow A' = 1 \text{ dm}^2$

26 Las áreas de dos hexágonos regulares semejantes son 93,6 m^2 y 452,63 m^2, respectivamente. Si el perímetro del primer hexágono mide 36 m, halla:

a. La razón de semejanza entre los hexágonos.

Se establece la razón de semejanza entre áreas:

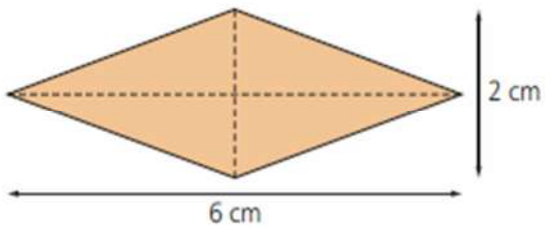
$A' = r^2 \cdot A \Rightarrow r^2 = \frac{A'}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{452{,}63}{93{,}6} = 4{,}8 \Rightarrow r = 2{,}2$

b. El perímetro del segundo hexágono.

Se establece la razón de semejanza entre perímetros:

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = 2{,}2 \cdot 36 = 79{,}2 \Rightarrow P' = 79{,}2$ m

27 Halla el perímetro de un rombo semejante al de la figura, cuya área sea nueve veces mayor.



Si la razón entre áreas es 9, entonces r = 3.

El lado del rombo inicial, *l*, es, aplicando Pitágoras:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 10 = l^2 \Rightarrow l = 3{,}16 \text{ cm}$$

Su perímetro es $P = 3{,}16 \cdot 4 = 12{,}64$ cm, por lo que el perímetro del nuevo rombo es $P' = r \cdot P = 3 \cdot 12{,}64 = 37{,}92$ cm.

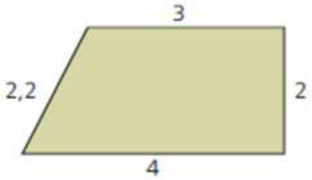
28 El perímetro de un rectángulo mide 36 m, y su área, 72 m^2. Calcula el área de otro rectángulo semejante cuyo perímetro mide 27 m.

Las relaciones entre perímetros y áreas son:

$$\left.\begin{array}{l} r = \frac{P'}{P} \\ r^2 = \frac{A'}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{A'}{A} \Rightarrow A' = \left(\frac{P'}{P}\right)^2 \cdot A$$

$$A' = \left(\frac{27}{36}\right)^2 \cdot 72 = 40{,}5 \Rightarrow A' = 40{,}5 \text{ m}^2$$

29 Calcula el área de un trapecio semejante al de la figura, con las dimensiones en metros, cuyo perímetro sea tres veces mayor.



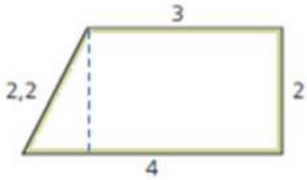
La relación entre perímetros equivale al valor de la razón:

$\frac{P'}{P} = \text{r} \Rightarrow \frac{3 \cdot P}{P} = \text{r} \Rightarrow 3 = \text{r}$

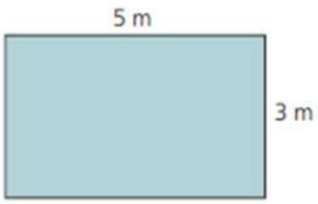
El área del trapecio es:

$A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A = 3 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 7 \Rightarrow A = 7 \text{ m}^2$

$A' = \text{r}^2 \cdot A \Rightarrow A' = 3^2 \cdot 7 = 63 \Rightarrow A' = 63 \text{ m}^2$



30 Fíjate en el rectángulo de la imagen:



Si se considera otro rectángulo semejante reducido cuyas áreas tengan entre sí una razón de, $\frac{1}{4}$ halla:

a. El perímetro del rectángulo semejante.

La razón de semejanza es $\text{r} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

El perímetro del rectángulo es P = 3 + 5 + 3 + 5 = 16 m, luego el perímetro del rectángulo reducido es $P' = \text{r} \cdot P \Rightarrow P' = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \Rightarrow P' = 8$ m

b. El área del nuevo rectángulo.

El área del rectángulo es $A = 3 \cdot 5 = 15 \text{ m}^2$, luego el área del rectángulo reducido es $A' = \text{r}^2 \cdot A \Rightarrow A' = 0{,}25 \cdot 15 = 3{,}75 \Rightarrow A' = 3{,}75 \text{ m}^2$.

c. Las dimensiones del rectángulo semejante.

La relación entre lados homólogos es r = 0,5, luego el rectángulo es de 2,5 m × 1,5 m.

31 El diámetro de una circunferencia mide 10 cm. Si se considera una nueva circunferencia cuyo radio es el doble que el de la anterior, calcula:

a. ¿Cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia que la de la primera?

La longitud de la circunferencia es equivale a su perímetro. Si la circunferencia tiene un radio r = 10 cm, su perímetro es $P = 2\pi r$. Si el radio de la segunda circunferencia es $r' = 2r$, su perímetro será $P' = 2\pi \cdot (2R) = 4\pi r$, es decir, es mayor dos veces. Si la razón entre perímetros es 2, quiere decir que r = 2.

b. ¿Cuántas veces es mayor el área del círculo?

Como r = 2, el área $A' = \text{r}^2 \cdot A \Rightarrow A' = 2^2 \cdot A$, es decir, es mayor cuatro veces.

32 Dados dos cubos cuyas aristas miden 4 cm y 6 cm, respectivamente:

a. Halla la razón de semejanza entre ambos cubos.

La razón es: $r = \frac{6}{4} = 1,5$

b. Determina la razón de semejanza entre sus volúmenes.

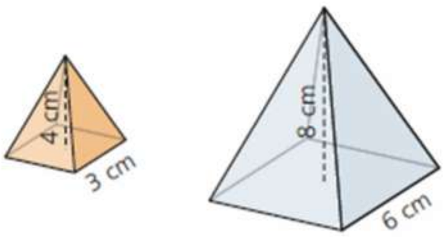
La razón entre sus volúmenes es: $\frac{V'}{V} = \frac{6^3}{4^3} = \frac{216}{64} = 1,5^3 = r^3$

c. Analiza cuál es la relación entre estas dos razones.

La razón de los volúmenes de los cubos es igual al cubo de la razón de dichos cuerpos.

SOLUCIONES PÁG. 265

33 Comprueba la relación entre la razón de semejanza de estas pirámides y la de sus volúmenes:



La razón de semejanza entre los lados de las pirámides es: $r = \frac{6}{3} = 2$

Se calcula el volumen de ambas pirámides mediante $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$, con lo que el volumen de la pirámide pequeña es 12 cm^2 y el de la pirámide grande es 96 cm^2.

La relación entre los volúmenes de las dos pirámides es: $\frac{V'}{V} = \frac{96}{12} = 8$.

Se verifica entonces que la razón de los volúmenes es igual al cubo de la razón de los cuerpos, pues 8 = 2^3.

APLICACIONES: PLANOS Y MAPAS. ESCALAS

34 El plano de un edificio realizado en una escala 1:150 tiene una planta cuadrada cuya arista mide 20 cm. Halla la superficie de la planta del edificio en la realidad.

$\frac{1}{150} = \frac{0,20}{x} \Rightarrow x = 30$ m

$A = l^2 \Rightarrow A = 30^2 = 900 \Rightarrow A = 900$ m^2

35 Se ha realizado la maqueta de una escultura que tiene unas dimensiones de 2 m × 3 m × 3,4 m. Si la escala de la maqueta es de 1:80, calcula las dimensiones de la escultura en la maqueta.

Se establece la relación de semejanza, donde *a* es el largo, *b* el ancho y *c* el fondo.

$$\frac{1}{80}=\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{3,4}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{a}{2}\Rightarrow a=0,025\text{ m}=2,5\text{ cm}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{b}{3}\Rightarrow b=0,0375\text{ m}=3,75\text{ cm}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{c}{3,4}\Rightarrow c=0,0425\text{ m}=4,25\text{ cm}$$

Las dimensiones son 2,5 cm × 3,75 cm × 4,25 cm

36 Dos ciudades se encuentran separadas por una distancia de 120 km. Al representarlas en un mapa, la distancia que las separa es de 20 cm.

a. ¿Cuál es la escala del mapa?

$$\frac{1}{x}=\frac{0,20}{120\,000}\Rightarrow x=600\,000\text{ m}$$

Es decir, 1 cm equivale a 600 000 cm, o 6 km. La escala es 1:600 000

b. ¿Cuál sería la distancia que separa a dos ciudades que en el mapa distan 12 cm una de otra?

$$\frac{1}{600\,000}=\frac{0,12}{d}\Rightarrow d=72\,000\text{ m}$$

La distancia real es 72 km.

37 En un mapa, dos ciudades se encuentran separadas por una distancia de 12 cm. Si en la realidad están a 84 km de distancia:

a. ¿Cuál será la escala del mapa?

$$\frac{1}{x}=\frac{0,12}{84\,000}\Rightarrow x=700\,000\text{ m}$$

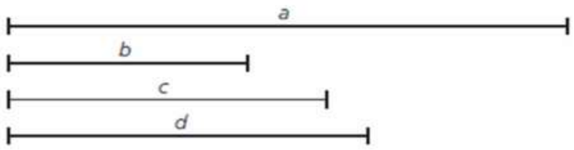
La escala es 1:700 000

b. ¿Cuál sería la distancia que separa en el mapa a dos ciudades que en la realidad distan 120 km?

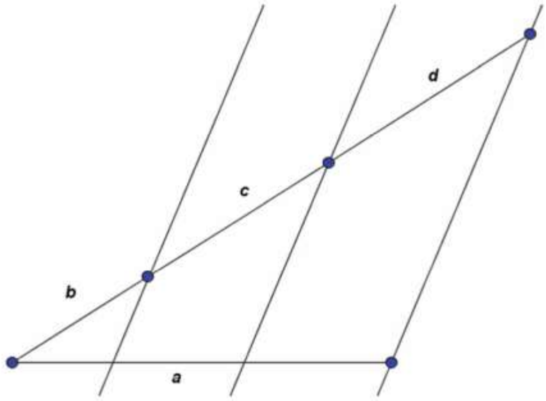
$$\frac{1}{700\,000}=\frac{d}{120\,000}\Rightarrow d=0,1714\text{ m}=17,14\text{ cm}$$

La distancia en el mapa es 17,14 cm.

38 Divide el segmento *a* en partes proporcionales a los segmentos *b*, *c* y *d*, utilizando el teorema de Tales.

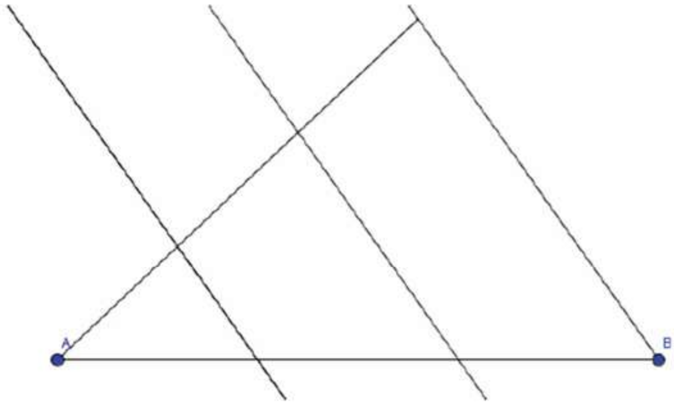


Se trata de disponer el segmento *a* como recta secante a los demás segmentos alineados, de modo que se puedan trazar rectas paralelas con las longitudes de cada segmento *b*, *c*, o *d*, y obtener así los segmentos proporcionales.



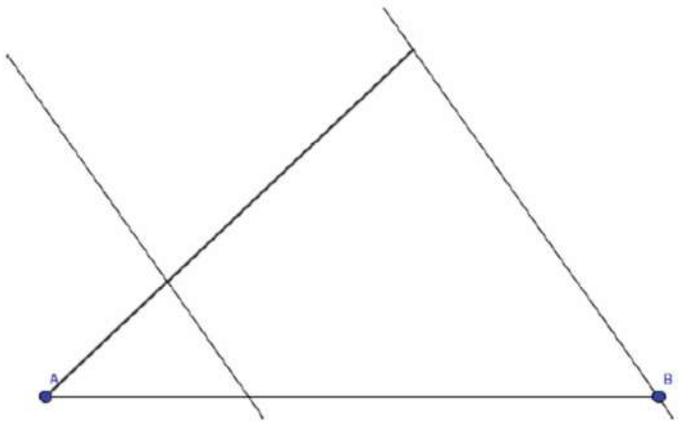
39 Divide en tu cuaderno un segmento de 10 cm en tres partes iguales.

Se trata de disponer el segmento de 10 cm como recta secante a una recta cualquiera de, por ejemplo, 9 cm, por la que trazaremos tres paralelas equidistantes.



40 Dibuja en tu cuaderno un segmento y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en dos partes de modo que una de ellas sea el doble que la otra.

Se trata de disponer el segmento dibujado como recta secante a una recta cualquiera, por ejemplo, de 3 cm y trazar dos paralelas separadas entre sí la distancia indicada en el enunciado, es decir, tomar un segmento de 1 cm y otro de 2 cm.



EVALUACIÓN

1 Los lados de dos rectángulos semejantes miden 6 m y 8 m, y 14,4 m y 19,2 m. ¿Cuál es la razón de semejanza?

a. 1,3 b. 2,4 **c. 3,5** **d. 4,6**

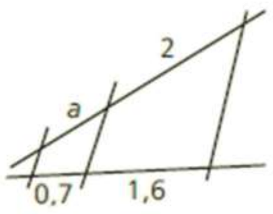
$$r = \frac{14,4}{6} = \frac{19,2}{8} = 2,4$$

2 Los lados de un triángulo miden 14 m, 15 m y 18 m, y los lados de otro semejante a él son *x* m, 9 m y 10,8 m. ¿Cuál es el valor de *x*?

a. 7,3 **b. 7,8** **c. 8** d. 8,4

$$\frac{14}{x} = \frac{15}{9} = \frac{18}{10,8} \Rightarrow x = 8,4 \text{ m}$$

3 El valor del segmento a es:



a. 0,45 b. 0,875 **c. 0,98** **d. 1,11**

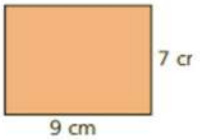
$$\frac{a}{0,7} = \frac{2}{1,6} \Rightarrow a = 0,875$$

4 **Se coloca perpendicular al suelo un bastón de 1 m de longitud y proyecta una sombra de 100 cm. Si en ese mismo instante un edificio colindante arroja una sombra de 30 m, ¿cuál es su altura?**

a. 30 cm b. 30 m **c. 300 cm** **d. 300 m**

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{3000} \Rightarrow x = 30 \text{ m}$$

5 **Considerando un rectángulo como el de la figura, halla los lados de otro rectángulo semejante cuya área sea 252 cm^2:**



a. 28 cm y 36 cm c. 14 cm y 18 cm
b. 10 cm y 12 cm **d. 21 cm y 27 cm**

$$\text{r}^2 = \frac{A'}{A} \Rightarrow \text{r}^2 = \frac{252}{63} \Rightarrow \text{r} = 2$$

Los lados del rectángulo semejante son entonces:

$7 \cdot 2 = 14$ cm

$9 \cdot 2 = 18$ cm

6 **En el plano de una casa, realizado a escala 1:50, el salón rectangular mide 12 cm × 8 cm. Halla la superficie real del salón.**

a. 24 m^2 **b. 9,6 m^2** **c. 96 m^2** **d. 48 m^2**

Se calculan los lados del salón rectangular con ayuda de la escala:

$$\frac{1}{50} = \frac{0{,}12}{a} = \frac{0{,}08}{b}$$
$$\frac{1}{50} = \frac{0{,}12}{a} \Rightarrow a = 6 \text{ m}$$
$$\frac{1}{50} = \frac{0{,}08}{b} \Rightarrow b = 4 \text{ m}$$

La superficie del salón es $A = 6 \cdot 4 = 24$ m^2

7 **Una fotografía mide 12 cm de largo por 8 cm de alto. Si se amplía a un alto de 12 cm, ¿cuál será el largo?**

a. 20 cm **b. 15 cm** **c. 8 cm** d. 18 cm

Se establece la relación de semejanza entre lados homólogos:

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$$