MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

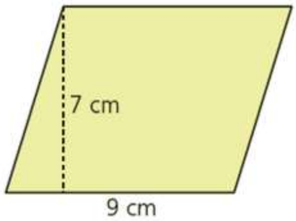
Unidad 5. Perímetros, longitudes, áreas y volúmenes

Unidad 5. Perímetros, longitudes, áreas y volúmenes

SOLUCIONES PÁG. 127

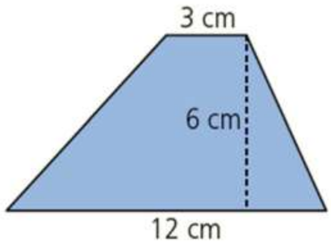
1 Determina el área de las siguientes figuras planas:

a.



$$A_{\text{romboide}} = b \cdot h \Rightarrow A_{\text{romboide}} = 9 \cdot 7 = 63 \Rightarrow A_{\text{romboide}} = 63 \text{ cm}^2$$

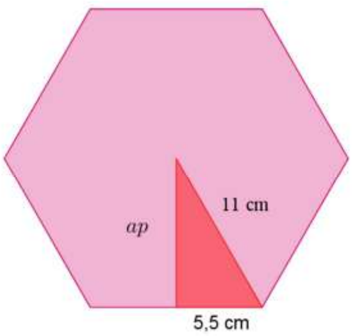
b.



$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = \frac{(12+3) \cdot 6}{2} = 45 \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = 45 \text{ cm}^2$$

2 Actividad resuelta.

3 Calcula el área de un hexágono regular cuyo lado mide 11 cm.



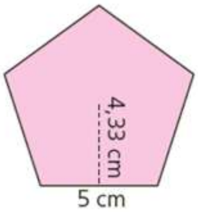
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono:

$$11^2 = ap^2 + 5,5^2 \Rightarrow ap = \sqrt{11^2 - 5,5^2} = \sqrt{90,75} = 9,53 \Rightarrow ap = 9,53 \text{ cm}$$

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 11 \cdot 9,53}{2} = 314,49 \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 314,49 \text{ cm}^2$$

4 Halla el perímetro y el área de los siguientes polígonos:

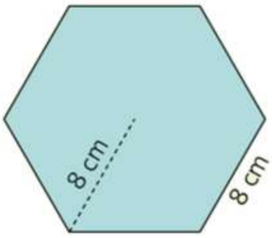
a.

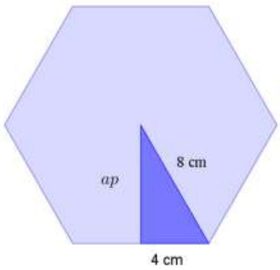


$P = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow P = 25$ cm

$A_{\text{pentágono}} = \dfrac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 54{,}13 \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = 54{,}13 \text{ cm}^2$

b.





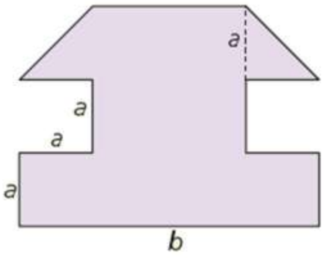
$P = 6 \cdot 8 = 48 \Rightarrow P = 48$ cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono:

$8^2 = ap^2 + 4^2 \Rightarrow ap = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93 \Rightarrow ap = 6{,}93$ cm

$A_{\text{hexágono}} = \dfrac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

5 El dibujo muestra el plano de una habitación en la que todas sus paredes contiguas forman ángulos múltiplos de 45º. ¿Cuál es el área de la habitación?



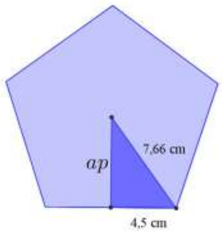
$A_{\text{habitación}} = 3a \cdot (b - a)$

6 Calcula el perímetro y el área de un heptágono regular de 12 cm de lado y 12,46 cm de apotema.

$P = 7 \cdot 12 = 84 \Rightarrow P = 84$ cm

$$A_{\text{heptágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{heptágono}} = \frac{7 \cdot 12 \cdot 12{,}46}{2} = 523{,}32 \Rightarrow A_{\text{heptágono}} = 523{,}32 \text{ cm}^2$$

7 Averigua el perímetro y el área de un pentágono regular cuyo lado mide 9 cm y que tiene un radio de 7,66 cm.



$P = 5 \cdot 9 = 45 \Rightarrow P = 45$ cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono:

$$7{,}66^2 = ap^2 + 4{,}5^2 \Rightarrow ap = \sqrt{7{,}66^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{38{,}43} = 6{,}2 \Rightarrow ap = 6{,}2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{pentágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5 \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = 139{,}5 \text{ cm}^2$$

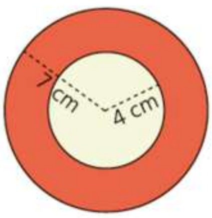
8 Se dice que un polígono recubre el plano cuando no deja huecos, es decir, cuando se puede colocar alrededor de uno de los vértices del polígono un número exacto de polígonos iguales hasta completar justamente una vuelta íntegra.
Formad grupos de alumnos e investigad cuáles son los polígonos regulares que pueden recubrir el plano.

Los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana son: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares. En cada vértice la suma de ángulos es de 360º, para que no queden espacios.

SOLUCIONES PÁG. 129

9 Halla el área de estas coronas circulares:

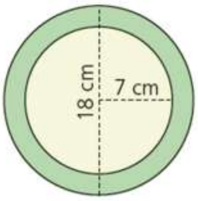
a.



$$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3{,}14 \cdot (7^2 - 4^2) = 103{,}62$$

$$A_{\text{corona circular}} = 103{,}62 \text{ cm}^2$$

b.

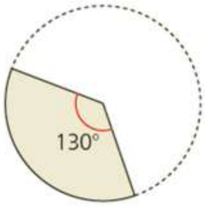


$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3{,}14 \cdot (9^2 - 7^2) = 100{,}48$

$A_{\text{corona circular}} = 100{,}48 \text{ cm}^2$

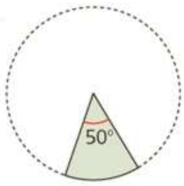
10 Calcula el área de los sectores circulares de estas circunferencias de 8 cm de radio:

a.



$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 130º}{360º} = 72{,}57 \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = 72{,}57 \text{ cm}^2$$

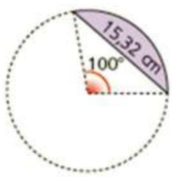
b.



$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 50º}{360º} = 27{,}91 \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = 27{,}91 \text{ cm}^2$$

11 Determina el área de los segmentos circulares de estas circunferencias de 10 cm de radio:

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo:

$10^2 = h^2 + 7{,}66^2 \Rightarrow h = \sqrt{10^2 - 7{,}66^2} = \sqrt{41{,}32} = 6{,}43 \Rightarrow h = 6{,}43 \text{ cm}$

$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} - \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 100º}{360º} - \frac{15{,}32 \cdot 6{,}43}{2} = 87{,}22 - 49{,}25 = 37{,}97$$

$A_{\text{segmento circular}} = 37{,}97 \text{ cm}^2$

b.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo:

$10^2 = h^2 + 5,74^2 \Rightarrow h = \sqrt{10^2 - 5,74^2} = \sqrt{67,05} = 8,19 \Rightarrow h = 8,19 \text{ cm}$

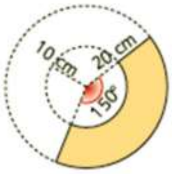
$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} - \dfrac{b \cdot h}{2}$

$A_{\text{segmento circular}} = \dfrac{3,14 \cdot 10^2 \cdot 70º}{360º} - \dfrac{11,47 \cdot 8,19}{2} = 61,06 - 46,97 = 14,09$

$A_{\text{segmento circular}} = 14,09 \text{ cm}^2$

12 Averigua el área de estos trapecios circulares:

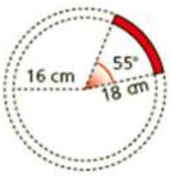
a.



$A_{\text{trapecio circular}} = \dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \dfrac{3,14 \cdot (20^2 - 10^2) \cdot 150º}{360º} = 392,5$

$A_{\text{trapecio circular}} = 392,5 \text{ cm}^2$

b.



$A_{\text{trapecio circular}} = \dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \dfrac{3,14 \cdot (18^2 - 16^2) \cdot 55º}{360º} = 32,62$

$A_{\text{trapecio circular}} = 32,62 \text{ cm}^2$

13 En un zoo hay una región circular de 5 m de diámetro que alberga a diversos animales. Se ha rodeado exteriormente por un paseo de baldosas de 1 m de ancho para el tránsito de visitantes.

a. Halla el área que ocupa la región circular.

$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 2,5^2 = 19,63 \Rightarrow A = 19,63 \text{ m}^2$

b. Calcula el área que ocupa el paseo exterior.

$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3,14 \cdot (3,5^2 - 2,5^2) = 18,84$

$A_{\text{corona circular}} = 18,84 \text{ m}^2$

c. Se van a instalar unas cristaleras en el perímetro de la región circular que abarquen 120º de la misma. ¿Qué longitud de cristaleras se necesita?

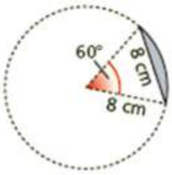
$$L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 120º}{360º} = 5{,}23 \Rightarrow L_{\text{arco}} = 5{,}23 \text{ m}$$

14 Investiga el funcionamiento del cuentakilómetros de una bicicleta. Toma las medidas necesarias en tu bicicleta y calcula la distancia que recorrerías al dar 100 vueltas.

Cada vuelta recorre $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, siendo r el radio de la rueda de la bicicleta. Midiendo ese radio y multiplicando por 100 se obtiene la distancia recorrida.

15 Averigua el área de las siguientes figuras circulares:

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo:

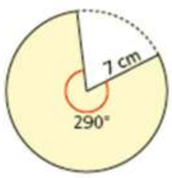
$$8^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93 \Rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} - \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 60º}{360º} - \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 33{,}49 - 27{,}72 = 5{,}77$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 5{,}77 \text{ cm}^2$$

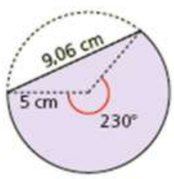
b.



$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 290º}{360º} = 123{,}94$$

$$A_{\text{sector circular}} = 123{,}94 \text{ cm}^2$$

c.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo:

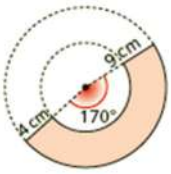
$$5^2 = h^2 + 4{,}53^2 \Rightarrow h = \sqrt{5^2 - 4{,}53^2} = \sqrt{4{,}48} = 2{,}12 \Rightarrow h = 2{,}12 \text{ cm}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} + A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360^{\text{o}}} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 230^{\text{o}}}{360^{\text{o}}} + \frac{9{,}06 \cdot 2{,}12}{2} = 50{,}15 + 9{,}6 = 59{,}75$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 59{,}75 \text{ cm}^2$$

d.



$$A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360^{\text{o}}} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{3{,}14 \cdot (9^2 - 5^2) \cdot 170^{\text{o}}}{360^{\text{o}}} = 83{,}04$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 83{,}04 \text{ cm}^2$$

16 Determina el área de la región coloreada en el interior de estos cuadrados de 10 cm de lado:

a.

El área de la región coloreada es la diferencia entre el área del cuadrado y cuatro veces la del círculo.

$$A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 10^2 = 100 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 19{,}63 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{región}} = A_{\text{cuadrado}} - 4 \cdot A_{\text{círculo}} = 100 - 4 \cdot 19{,}63 = 21{,}48 \text{ cm}^2$$

b.

El área de la región coloreada es la mitad de la diferencia entre el área del cuadrado y el área del círculo.

$$A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 10^2 = 100 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 78{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{región coloreada}} = \frac{A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}}}{2} = \frac{100 - 78{,}5}{2} = 10{,}75 \text{ cm}^2$$

17 Calcula el área de la región coloreada.

a.

El área de la región coloreada es la diferencia entre el área del círculo y el área del pentágono.
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el radio del pentágono:

$$r^2 = 3,44^2 + 2,5^2 \Rightarrow r = \sqrt{18,08} = 4,25 \Rightarrow r = 4,25 \text{ cm}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3,14 \cdot 4,25^2 = 56,72 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 56,72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{pentágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 3,44}{2} = 43 \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = 43 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{región}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{pentágono}} = 56,72 - 43 = 13,72 \text{ cm}^2$$

b.

El área de la región coloreada es la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono.
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el radio la apotema del hexágono:

$$5^2 = ap^2 + 2,5^2 \Rightarrow ap = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = \sqrt{18,75} = 4,33 \Rightarrow ap = 4,33 \text{ cm}$$

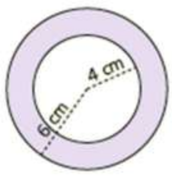
$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 64,95 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{región}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{hexágono}} = 78,5 - 64,95 = 13,55 \text{ cm}^2$$

18 Halla el área de las siguientes figuras circulares:

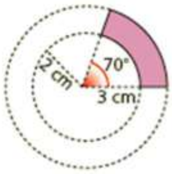
a.



$$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3,14 \cdot (6^2 - 4^2) = 62,8$$

$$A_{\text{corona circular}} = 62,8 \text{ cm}^2$$

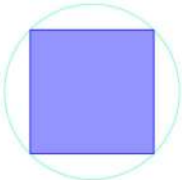
b.



$$A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360^{o}} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{3{,}14 \cdot (3^2 - 2^2) \cdot 70^{o}}{360^{o}} = 3{,}05$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 3{,}05 \text{ cm}^2$$

19 Un cuadrado de 8 cm de lado está inscrito en una circunferencia. Halla la longitud de la circunferencia y el área del círculo.



La diagonal del cuadrado es el diámetro de la circunferencia.
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado:

$$d^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow d = \sqrt{128} = 11{,}31 \Rightarrow d = 11{,}31 \text{ cm}$$

$$L_{\text{circunferencia}} = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}66 = 35{,}54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 5{,}66^2 = 100{,}59 \text{ cm}^2$$

20 La luz de un faro barre un ángulo plano de 150°. Si el alcance de la luz del faro es de 9 millas náuticas, ¿cuál es la longitud, en metros, del arco barrido por la luz del faro?
Dato: 1 milla náutica = 1,852 km.

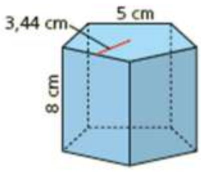
$$L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot x^{o}}{360^{o}} \Rightarrow L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (9 \cdot 1852) \cdot 150^{o}}{360^{o}} = 43\,614{,}6 \Rightarrow L_{\text{arco}} = 43\,614{,}6 \text{ m}$$

SOLUCIONES PÁG. 131

21 Actividad resuelta.

22 Determina el área total y el volumen de estas figuras:

a.

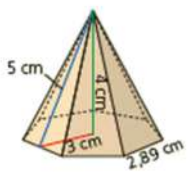


$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 8 = 86 + 200 = 286 \Rightarrow A_{\text{total}} = 286 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}44}{2} \cdot 8 = 344 \text{ cm}^3$$

b.

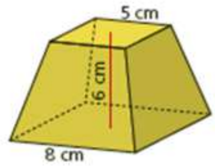


$$A_{\text{pirámide}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{pirámide}} = 7 \cdot 2{,}89 \cdot \frac{5+3}{2} = 80{,}92 A_{\text{pirámide}} = 80{,}92 \text{ cm}^2$$

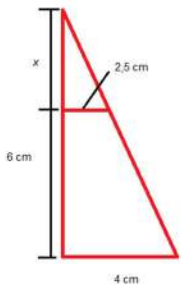
$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 2{,}89 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 40{,}46 \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = 40{,}46 \text{ cm}^3$$

23 Halla el volumen de las siguientes figuras:

a.



Se aplica la semejanza de triángulos a la pirámide inicial para calcular su altura.



$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{x+6}{4} \Rightarrow 4x = 2{,}5 \cdot (x+6) \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

La altura inicial de la pirámide es 10 + 6 = 16 cm.

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 16 = 341{,}33$$

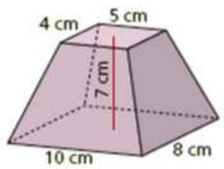
$$V_{\text{pirámide grande}} = 341{,}33 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 10 = 83{,}33$$

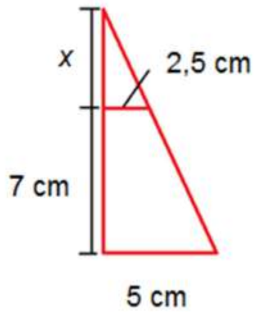
$$V_{\text{pirámide grande}} = 83{,}33 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 341{,}33 - 83{,}33 = 258 \text{ cm}^3$$

b.



Se aplica la semejanza de triángulos a la pirámide inicial para calcular su altura.



$\frac{x}{2,5} = \frac{x+7}{5} \Rightarrow 5x = 2,5 \cdot (x+7) \Rightarrow x = 7$ cm

La altura inicial de la pirámide es 7 + 7 = 14 cm.

$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$

$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 14 = 373,33$

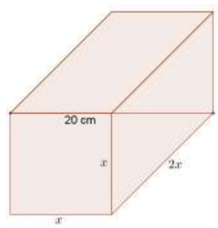
$V_{\text{pirámide grande}} = 373,33\ \text{cm}^3$

$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 = 46,67$

$V_{\text{pirámide grande}} = 46,67\ \text{cm}^3$

$V_{\text{tronco de pirámide}} = 373,33 - 46,67 = 326,66\ \text{cm}^3$

24 Una caja de zapatos mide de largo igual que de alto, mientras que de ancho mide el doble que de largo.
Si la diagonal de una de las caras más grandes del paralelepípedo mide 20 cm, halla la cantidad necesaria de cartón para fabricar la caja de zapatos.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor de *x*:

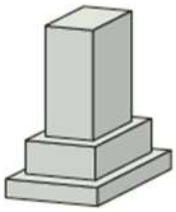
$D^2 = x^2 + x^2 + (2x)^2 \Rightarrow 20^2 = 6x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{400}{6}} = \sqrt{66,67} = 8,17 \Rightarrow x = 8,17$ cm

El área total es:

$A = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot 2x = 2x^2 + 8x^2 = 10x^2 \Rightarrow A = 10 \cdot 8,17^2 = 10 \cdot 66,75 = 667,5$

$A = 667,5\ \text{cm}^2$

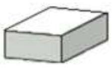
25 Determina el área total que tiene a la vista este monolito si las bases de sus piezas son cuadrados de 3 m, 2 m y 1 m de lado, respectivamente, y sus alturas miden 6 dm, 15 dm y 60 dm, también respectivamente.



El área total de la base inferior:

$$A_{\text{total base inferior}} = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 25{,}2 \Rightarrow A_{\text{total base inferior}} = 25{,}2 \text{ m}^2$$

El área lateral de la base intermedia:



$$A_{\text{lateral base intermedia}} = 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 12 \Rightarrow A_{\text{lateral base intermedia}} = 12 \text{ m}^2$$

El área lateral de la base superior:

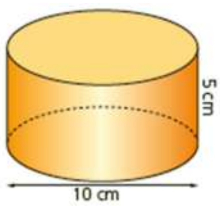
$$A_{\text{lateral base superior}} = 4 \cdot 1 \cdot 6 = 24 \Rightarrow A_{\text{lateral base superior}} = 24 \text{ m}^2$$

$A_{\text{figura}} = 25{,}2 + 12 + 24 = 61{,}2 \text{ m}^2$

SOLUCIONES PÁG 133

26 Calcula el área total y el volumen de las siguientes figuras:

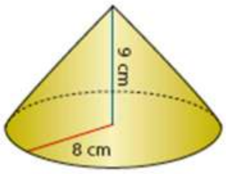
a.



$$A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h) \Rightarrow A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5 + 5) = 314 \Rightarrow A_{\text{cilindro}} = 314 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 5 = 392{,}5 \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = 392{,}5 \text{ cm}^3$$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la generatriz:

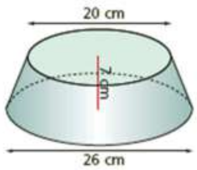
$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow g = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145} = 12{,}04 \Rightarrow g = 12{,}04 \text{ cm}$$

$$A_{\text{cono}} = \pi \cdot r \cdot (g + r) \Rightarrow A_{\text{cono}} = 3{,}14 \cdot 8 \cdot (12{,}04 + 8) = 503{,}4 \Rightarrow A_{\text{cono}} = 503{,}4 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 9 = 602{,}88 \Rightarrow V_{\text{cono}} = 602{,}88 \text{ cm}^3$$

27 Halla el área total y el volumen de las figuras propuestas.

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la generatriz:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2 \Rightarrow g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} \Rightarrow g = \sqrt{7^2 + (13 - 10)^2} = \sqrt{58} = 7{,}62$$

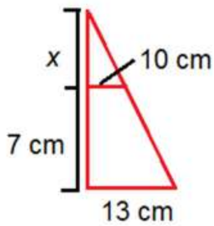
$$g = 7{,}62 \text{ cm}$$

$$A_{\text{tronco de cono}} = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

$$A_{\text{tronco de cono}} = 3{,}14 \cdot 13^2 + 3{,}14 \cdot 10^2 + 3{,}14 \cdot 7{,}62 \cdot (13 + 10) = 1\,394{,}98$$

$$A_{\text{tronco de cono}} = 1\,394{,}98 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de cono se aplica el teorema de Tales:



$$\frac{x}{10} = \frac{x + 7}{13} \Rightarrow 13x = 10 \cdot (x + 7) \Rightarrow x = 23{,}33 \text{ cm}$$

La altura inicial del cono es de 7 + 23,33 = 30,33 cm.

$$V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}}$$

$$V_{\text{cono grande}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{cono grande}} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 13^2 \cdot 30{,}33 = 5\,364{,}97$$

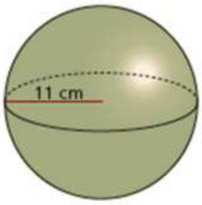
$$V_{\text{cono grande}} = 5\,364{,}97 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono pequeño}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{cono pequeño}} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 23{,}33 = 2\,441{,}87$$

$$V_{\text{cono pequeño}} = 2\,441{,}87 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tronco de cono}} = 5\,364{,}97 - 2\,441{,}87 = 2\,923{,}1 \Rightarrow V_{\text{tronco de cono}} = 2\,923{,}1 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 11^2 = 1519{,}76 \Rightarrow A_{esfera} = 1519{,}76 \text{ cm}^2$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 11^3 = 5572{,}45 \Rightarrow V_{esfera} = 5572{,}45 \text{ cm}^3$$

28 **Un plano corta una esfera pasando por su centro y produce una sección de 706,86 dm² de área. Halla el volumen y la superficie de la esfera.**

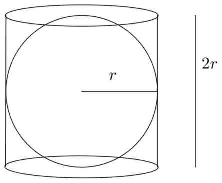
Se halla el radio de la esfera:

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{706{,}86}{3{,}14}} = \sqrt{225{,}11} = 15 \Rightarrow r = 15 \text{ dm}$$

$$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 = 2826 \Rightarrow A_{esfera} = 2826 \text{ dm}^2$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15^3 = 14130 \Rightarrow V_{esfera} = 14130 \text{ dm}^3$$

29 **Un teorema atribuido a Arquímedes afirma que el volumen de una esfera equivale a los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito. Pruébalo.**



$$\left.\begin{array}{l} V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \end{array}\right\} \frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^3}}{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^3}} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{esfera} = \frac{2}{3} V_{cilindro}$$

30 **Halla el volumen de estos cuerpos en función de π:**

a. **Un cilindro de 9 cm de radio y 9 cm de altura.**

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 9^2 \cdot 9 = 729\pi \Rightarrow V_{cilindro} = 729\pi \text{ cm}^2$$

b. **Un cono de 9 cm de radio y 9 cm de altura.**

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 9 = 243\pi \Rightarrow V_{cono} = 243\pi \text{ cm}^3$$

c. Una esfera de 9 cm de radio.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 972\pi \Rightarrow V_{esfera} = 972\pi \text{ cm}^3$$

Comprueba que se verifica: $V_{esfera} = V_{cilindro} + V_{cono}$

Se verifica que $V_{esfera} = V_{cilindro} + V_{cono} \Rightarrow 972\pi = 729\pi + 243\pi \Rightarrow 972\pi = 972\pi$

31 Actividad resuelta.

32 Averigua el área de las esferas que cumplen las siguientes condiciones:

a. Un plano la corta pasando por su centro y produce una sección que tiene un borde de 44 dm de longitud.

Se averigua el radio de la esfera:

$$L_{circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{L_{circunferencia}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{44}{2 \cdot 3{,}14} = 7 \Rightarrow r = 7 \text{ dm}$$

$$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 7^2 = 615{,}44 \Rightarrow A_{esfera} = 615{,}44 \text{ dm}^2$$

b. Un plano la corta a una distancia de 8 dm de su centro y produce una sección de 179,07 dm² de área.

Se averigua el radio de la sección:

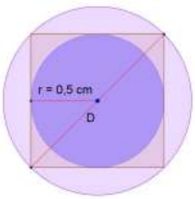
$$A_{sección} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_{sección}}{\pi}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{179{,}07}{3{,}14}} = \sqrt{57{,}03} = 7{,}55 \Rightarrow r = 7{,}55 \text{ dm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el radio de la esfera:

$$R = \sqrt{8^2 + 7{,}55^2} = \sqrt{121} = 11 \Rightarrow R = 11 \text{ dm}$$

$$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 11^2 = 1\,519{,}76 \Rightarrow A_{esfera} = 1\,519{,}76 \text{ dm}^2$$

33 Determina el volumen y la superficie de las esferas inscrita y circunscrita en un cubo de 1 m de arista.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la diagonal del cuadrado:

$$D = \sqrt{l^2 + l^2} \Rightarrow D = \sqrt{2 \cdot 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}41 \Rightarrow D = 1{,}41 \text{ m}$$

Por lo tanto, el radio de la circunferencia circunscrita mide 0,71 m.

$$A_{esfera\ inscrita} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14 \Rightarrow A_{esfera\ inscrita} = 3{,}14 \text{ m}^2$$

$$V_{esfera\ inscrita} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \Rightarrow V_{esfera\ inscrita} = 0{,}52 \text{ m}^3$$

$$A_{esfera\ circunscrita} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}71^2 = 6{,}33 \Rightarrow A_{esfera\ circunscrita} = 6{,}33 \text{ m}^2$$

$$V_{esfera\ circunscrita} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}71^3 = 1{,}5 \Rightarrow V_{esfera\ cinrcuscrita}\ 1{,}5 \text{ m}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 135

1 **Describe cada una de las figuras planas.**

- El **triángulo** es el polígono de menor número de lados, tres.
- El **cuadrado** es un polígono con 4 lados iguales y 4 ángulos iguales y rectos.
- El **rectángulo** tiene cuatro ángulos iguales y rectos, y lados paralelos dos a dos.
- El **romboide** tiene lados y ángulos iguales dos a dos, y lados paralelos dos a dos.
- El **rombo** tiene los cuatro lados iguales paralelos dos a dos y los ángulos iguales dos a dos.
- El **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos.
- El **polígono regular** tiene todos sus lados y ángulos iguales.

2 **Define cada uno de los elementos de un polígono regular.**

- El **lado** es cada segmento de la línea poligonal que conforma el polígono.
- El **vértice** es el punto de intersección entre dos lados consecutivos.
- La **diagonal** es el segmento que une dos vértices no consecutivos.
- El **ángulo interior** es el formado por dos lados consecutivos.
- El **ángulo exterior** es el formado por un lado y la prolongación de su adyacente.
- El **centro** es el punto que equidista de todos los vértices, y coincide con el centro de la circunferencia que circunscribe al polígono.
- La **apotema** es el segmento que une el centro con la mitad de un lado.
- El **radio** es el segmento que une el centro con un vértice.
- El **ángulo central** es el formado por dos radios consecutivos.

3 **¿Cuántos y cuáles son los poliedros regulares que existen?**

Son cinco: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

4 **Indica los elementos de un cilindro.**

Las bases, el radio, la altura y la generatriz.

5 **Describe cada una de las figuras circulares.**

- El **círculo** es la región encerrada dentro de una circunferencia.
- El **sector circular** es la zona del círculo encerrada entre dos radios y el arco que forman.
- El **segmento circular** es la zona del círculo encerrada entre una cuerda y el arco que forman.
- La **corona circular** es la zona encerrada entre dos circunferencias concéntricas.
- El **trapecio circular** es la zona de una corona circular encerrada entre dos radios.

6 **¿Qué elementos de un cono forman un triángulo rectángulo? Escribe el teorema de Pitágoras que verifican.**

El radio, la altura y la generatriz: $g^2 = r^2 + h^2$

7 Realiza una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, utilizar Glogster…

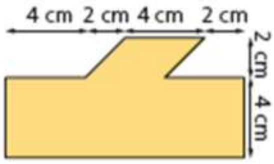
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 136 - REPASO FINAL

PERÍMETRO Y ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

1 Halla el perímetro y el área de las siguientes figuras planas:

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado oblicuo:

$a = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \Rightarrow a = 2{,}83$ cm

P = 4 + 2,83 + 4 + 2,83 + 4 + 4 + 12 + 4 = 37,66 cm

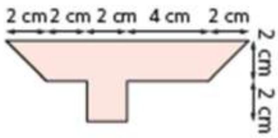
El área de la figura es la suma del área del rectángulo más el área del romboide:

$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 12 \cdot 4 = 48 \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 48 \text{ cm}^2$

$A_{\text{romboide}} = b \cdot h \Rightarrow A_{\text{romboide}} = 4 \cdot 2 = 8 \Rightarrow A_{\text{romboide}} = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 48 + 8 = 56 \text{ cm}^2$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado oblicuo:

$a = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \Rightarrow a = 2{,}83$ cm

P = 12 + 2,83 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2,83 = 29,66 cm

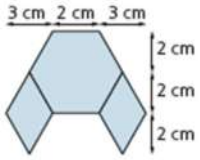
El área de la figura es la suma del área del trapecio más el área del cuadrado:

$A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(12+8) \cdot 2}{2} = 20 \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = 20 \text{ cm}^2$

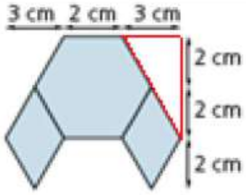
$A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 2^2 = 4 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 20 + 4 = 24 \text{ cm}^2$

c.



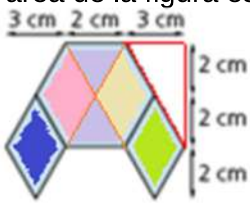
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado oblicuo más largo:



$a=\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow a=\sqrt{25}=5\Rightarrow a=5\text{ cm}$

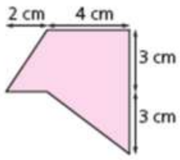
P = 2 + 5 + 2,5 + 2,5 + 2 + 2,5 + 2,5 + 5 = 24 cm

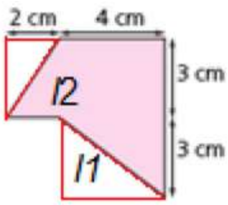
El área de la figura es cinco veces el área del rombo:



$A_{\text{figura}}=5\cdot A_{\text{rombo}}\Rightarrow A_{\text{figura}}=5\cdot\frac{D\cdot d}{2}\Rightarrow A_{\text{figura}}=5\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=30\Rightarrow A_{\text{figura}}=30\text{ cm}^2$

d.





Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular l_1:

$l_1=\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow l_1=\sqrt{25}=5\Rightarrow l_1=5\text{ cm}$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular l_2:

$l_2=\sqrt{2^2+3^2}\Rightarrow l_2=\sqrt{13}=3{,}61\Rightarrow l_2=3{,}61\text{ cm}$

P = 4 + 6 + 5 + 2 + 3,61 = 20,61 cm

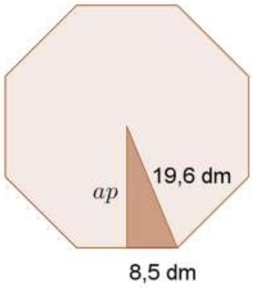
El área de la figura es la suma del área del trapecio más el área del triángulo:

$A_{\text{trapecio}}=\frac{(B+b)\cdot h}{2}\Rightarrow A_{\text{trapecio}}=\frac{(3+6)\cdot 4}{2}=18\Rightarrow A_{\text{trapecio}}=18\text{ cm}^2$

$A_{\text{triángulo}}=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A_{\text{triángulo}}=\frac{3\cdot 2}{2}=3\Rightarrow A_{\text{triángulo}}=3\text{ cm}^2$

A_{total} = 18 + 3 = 21 cm^2

2 Calcula el área de un octógono regular de 17 dm de lado y 19,6 dm de radio.



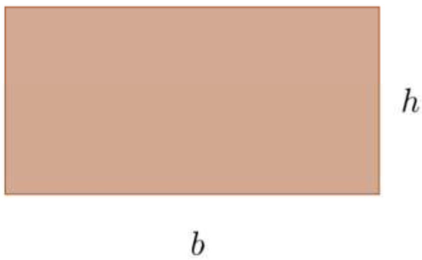
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema

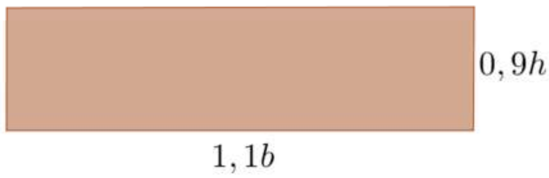
$ap=\sqrt{19,6^2-8,5^2}\Rightarrow ap=\sqrt{384,16-72,25}=\sqrt{311,91}=17,66\Rightarrow ap=17,66\text{ dm}$

$A_{\text{octógono}}=\dfrac{P\cdot ap}{2}\Rightarrow A_{\text{octógono}}=\dfrac{17\cdot 8\cdot 17,66}{2}=1\,200,88\Rightarrow A_{\text{octógono}}=1\,200,88\text{ dm}^2$

3 Si se aumenta un 10 % la longitud de dos de los lados opuestos de un rectángulo y se disminuye en un 10 % la de los otros dos lados, se forma un nuevo rectángulo:

a. ¿Varía el área del nuevo rectángulo?





$A = b \cdot h$ $\qquad$ $A = 1,1b \cdot 0,9h = 0,99b \cdot h$

Sí, varía el área del nuevo rectángulo.

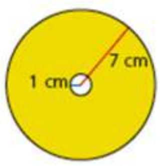
b. En caso afirmativo, ¿qué porcentaje del área original mide la nueva área?

$1,1a \cdot 0,9b = 0,99ab$, mide el 99 %

LONGITUDES Y ÁREAS DE LAS FIGURAS CIRCULARES

4 Averigua el área de las siguientes figuras circulares:

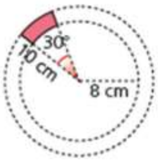
a.



$A_{\text{corona circular}}=\pi\cdot(R^2-r^2)\Rightarrow A_{\text{corona circular}}=3,14\cdot(7^2-1^2)=150,72$

$A_{\text{corona circular}}=150,72\text{ cm}^2$

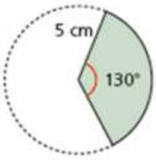
b.



$$A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{3{,}14 \cdot (10^2 - 8^2) \cdot 30º}{360º} = 9{,}42$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 9{,}42 \text{ cm}^2$$

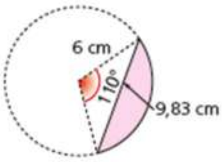
c.



$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 130º}{360º} = 28{,}35$$

$$A_{\text{sector circular}} = 28{,}35 \text{ cm}^2$$

d.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo:

$$6^2 = h^2 + 4{,}92^2 \Rightarrow h = \sqrt{6^2 - 4{,}92^2} = \sqrt{11{,}79} = 3{,}43 \Rightarrow h = 3{,}43 \text{ cm}$$

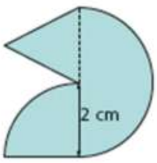
$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} - \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 110º}{360º} - \frac{9{,}83 \cdot 3{,}43}{2} = 34{,}54 - 16{,}86 = 17{,}68$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 17{,}68 \text{ cm}^2$$

5 Determina el área de estas figuras:

a.



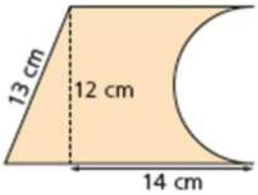
El área total es la suma del área de los tres cuartos de círculo más el área del triángulo isósceles.

$$A_{\text{figura circular}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{figura circular}} = \frac{3}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 9{,}42 \Rightarrow A_{\text{figura circular}} = 9{,}42 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = 2 \text{ cm}^2$$

A_{total} = 9,42 + 2 = 11,42 cm^2

b.



El área de la figura es el área del rectángulo más el área del triángulo menos el área de medio círculo:

$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 14 \cdot 12 = 168 \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 168 \text{ cm}^2$

$A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} \Rightarrow A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 6^2}{2} = 56{,}52 \Rightarrow A_{\text{semicírculo}} = 56{,}52 \text{ cm}^2$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la base del triángulo:

$13^2 = b^2 + 12^2 \Rightarrow b = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow b = 5 \text{ cm}$

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30 \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = 30 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 168 - 56{,}52 + 30 = 141{,}48 \text{ cm}^2$

6 Una circunferencia tiene un sector circular de 154° de amplitud y 71,6 cm^2 de área. ¿Cuál será el radio de la circunferencia?

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360^\circ} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_{\text{sector circular}} \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \hat{A}}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{71{,}6 \cdot 360^\circ}{3{,}14 \cdot 154^\circ}} = \sqrt{53{,}3} = 7{,}3$$

$r = 7{,}3 \text{ cm}$

7 Un jardín circular de 6 m de diámetro está rodeado por una zona de gravilla blanca que tiene 80 cm de ancho.

a. ¿Qué área ocupa la gravilla?

$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3{,}14 \cdot (3{,}8^2 - 3^2) = 17{,}08$

$A_{\text{corona circular}} = 17{,}08 \text{ cm}^2$

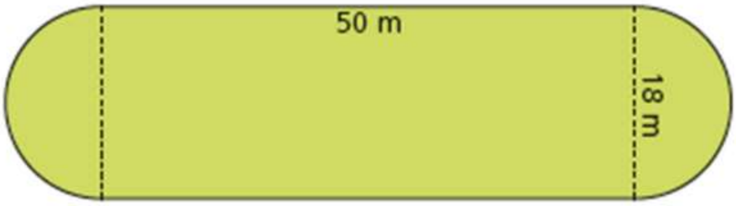
b. Se pretende vallar la zona de gravilla por la parte exterior. ¿Qué longitud tendrá que tener la valla?

$L = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}8 = 23{,}86 \Rightarrow L = 23{,}86 \text{ cm}$

c. ¿Cuál será la longitud de la valla para un sector del jardín con una amplitud de 70°?

$$L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \hat{A}}{360^\circ} \Rightarrow L_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}8 \cdot 70^\circ}{360^\circ} = 4{,}64 \Rightarrow L_{\text{arco}} = 4{,}64 \text{ cm}$$

8 Calcula la distancia que recorre un ciclista al dar 30 vueltas a un circuito como el de la figura.

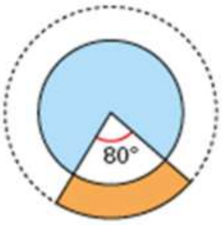


Se calcula la longitud de una vuelta:
$L = 50 \cdot 2 + 3{,}14 \cdot 18 = 156{,}52 \Rightarrow L = 156{,}52$ m

$$30 \text{ vueltas} \cdot \frac{156{,}52 \text{ m}}{1 \text{ vuelta}} = 4\,695{,}6 \text{ m}$$

9 Halla el área de las zonas coloreadas si los radios de las circunferencias son 4 cm y 3 cm, respectivamente.

a.



$$A_{\text{azul}} = A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360^{\circ}} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 280^{\circ}}{360^{\circ}} = 21{,}98$$

$$A_{\text{sector circular}} = 21{,}98 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{naranja}} = A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360^{\circ}} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{3{,}14 \cdot (4^2 - 3^2) \cdot 80^{\circ}}{360^{\circ}} = 4{,}88$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 4{,}88 \text{ cm}^2$$

b.

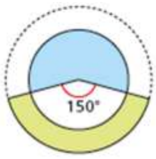
$$A_{\text{naranja}} = A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360^{\circ}} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 180^{\circ}}{360^{\circ}} = 14{,}13$$

$$A_{\text{sector circular}} = 14{,}13 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{amarilla}} = A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow A_{\text{corona circular}} = 3{,}14 \cdot (4^2 - 3^2) = 21{,}98$$

$$A_{\text{corona circular}} = 21{,}98 \text{ cm}^2$$

c.



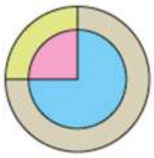
$$A_{\text{azul}} = A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360^{\text{o}}} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 210^{\text{o}}}{360^{\text{o}}} = 16{,}49$$

$$A_{\text{sector circular}} = 16{,}49 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{verde}} = A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360^{\text{o}}} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{3{,}14 \cdot (4^2 - 3^2) \cdot 150^{\text{o}}}{360^{\text{o}}} = 9{,}16$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 9{,}16 \text{ cm}^2$$

d.



$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 28{,}26 \text{ cm}^2$

- $A_{\text{azul}} = \frac{3}{4} A_{\text{círculo}} = \frac{3}{4} \cdot 28{,}26 = 21{,}20 \text{ cm}^2$
- $A_{\text{rosa}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{azul}} \Rightarrow A_{\text{rosa}} = 28{,}26 - 21{,}20 = 7{,}06 \text{ cm}^2$
- $A_{\text{crema}} = \frac{3}{4} A_{\text{corona circular}} = \frac{3}{4} \cdot 21{,}98 = 16{,}49 \text{ cm}^2$
- $A_{\text{verde}} = A_{\text{corona circular}} - A_{\text{verde}} \Rightarrow A_{\text{verde}} = 21{,}98 - 16{,}49 = 5{,}49 \text{ cm}^2$

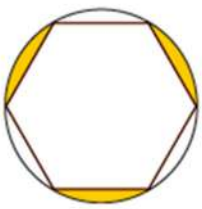
10 Si el área de un círculo, cuya circunferencia mide 24π dm, es kπ dm^2, ¿cuánto vale *k*?

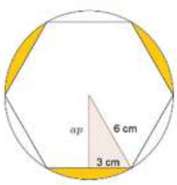
Se calcula el radio de la circunferencia:
$L = d \cdot \pi \Rightarrow 24\pi = d \cdot \pi \Rightarrow d = 24$. Por lo tanto, el radio mide 12 dm.

Se igualan las expresiones del área de un círculo:
$\pi \cdot r^2 = k\pi \Rightarrow \pi \cdot 12^2 = k\pi \Rightarrow k = 144$

11 Averigua el área de las zonas coloreadas si el círculo tiene 6 cm de radio.

a.





Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema del hexágono:

$ap = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5,2 \Rightarrow ap = 5,2 \text{ cm}$

Se calcula el área de un segmento circular:

$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} - \frac{b \cdot h}{2}$$

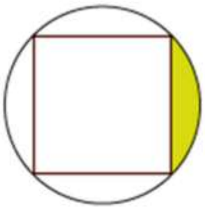
$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{3,14 \cdot 6^2 \cdot 60º}{360º} - \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 18,84 - 15,6 = 3,24$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 3,24 \text{ cm}^2$$

El área de la zona coloreada es:

$3 \cdot 3,24 \text{ cm}^2 = 9,72 \text{ cm}^2$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el lado del cuadrado:

$$12^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{144}{2}} = \sqrt{72} = 8,49 \Rightarrow l = 8,49 \text{ cm}$$

El área de la zona coloreada es la cuarta parte de la diferencia del área del círculo y el área del cuadrado:

$$A = \frac{A_{\text{círculo}} - A_{\text{cuadrado}}}{4}$$

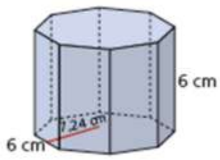
$$A = \frac{\pi \cdot r^2 - l^2}{4} \Rightarrow A = \frac{3,14 \cdot 6^2 - 8,49^2}{4} = \frac{113,04 - 72,08}{4} = 10,24 \Rightarrow A = 10,24 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 137

ÁREAS Y VOLÚMENES DE POLIEDROS

12 Halla el área total y el volumen de los siguientes poliedros:

a.



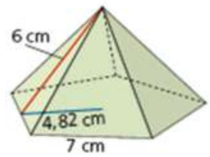
$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{prisma}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 7,24}{2} + 8 \cdot 6 \cdot 6 = 347,52 + 288 = 635,52 \Rightarrow A_{\text{prisma}} = 635,52 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7,24}{2} \cdot 6 = 1042,56$$

$$V_{\text{prisma}} = 1042,56 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{\text{pirámide}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{pirámide}} = 5 \cdot 7 \cdot \frac{6 + 4,82}{2} = 189,35 \Rightarrow A_{\text{pirámide}} = 189,35 \text{ cm}^2$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la pirámide:

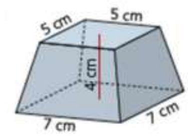
$$h = \sqrt{ap^2 - ap'^2} \Rightarrow h = \sqrt{6^2 - 4,82^2} = \sqrt{12,77} = 3,57 \Rightarrow h = 3,57 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 4,82}{2} \cdot 3,57 = 100,38$$

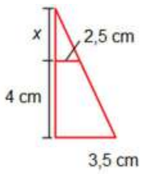
$$V_{\text{pirámide}} = 100,38 \text{ cm}^3$$

13 Calcula el volumen de estos poliedros:

a.



Se aplica la semejanza de triángulos a la pirámide inicial para calcular su altura.



$$\frac{x}{2,5} = \frac{x + 4}{3,5} \Rightarrow 3,5x = 2,5 \cdot (x + 4) \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

La altura inicial de la pirámide es 4 + 10 = 14 cm.

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 14 = 228,67$$

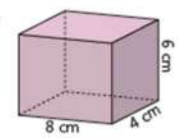
$$V_{\text{pirámide grande}} = 228,67 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 10 = 83,33$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = 83,33 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 228,67 - 83,33 = 145,34 \text{ cm}^3$$

b.

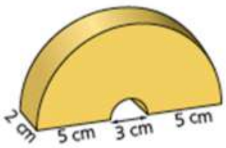


$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 8 \cdot 4 \cdot 6 = 192 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 192 \text{ cm}^3$$

ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

14 Determina el volumen de estos cuerpos.

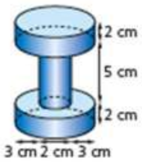
a.



$$V = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{2} \cdot h$$

$$V = \frac{3{,}14 \cdot (6{,}5^2 - 1{,}5^2)}{2} \cdot 2 = 125{,}6 \Rightarrow V = 125{,}6 \text{ cm}^3$$

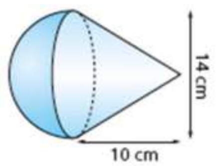
b.



$$V = 2 \cdot V_{\text{cilindro de mayor radio}} + V_{\text{cilindro de menor radio}} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 2 + 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 5 = 216{,}66 \text{ cm}^3$$

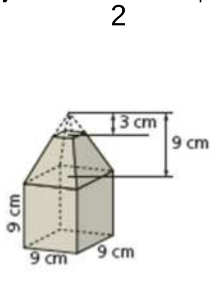
c.



$$V = \frac{V_{\text{esfera}}}{2} + V_{\text{cono}} \Rightarrow V = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 7^3}{2} + \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 10 = 718{,}01 + 512{,}87 = 1230{,}88 \Rightarrow V = 1230{,}88 \text{ cm}^3$$

d.

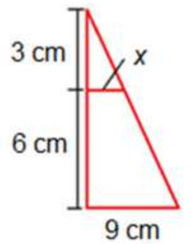


$$V = V_{\text{cubo}} + V_{\text{tronco de pirámide}} \Rightarrow V = a^3 + (V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}})$$

$$V = a^3 + \frac{A_{\text{base pirámide grande}} \cdot h_{\text{pirámide grande}}}{3} - \frac{A_{\text{base pirámide pequeña}} \cdot h_{\text{pirámide pequeña}}}{3}$$

$$V = 9^3 + \frac{9^2 \cdot 12}{3} - \frac{A_{\text{base pirámide pequeña}} \cdot 3}{3}$$

Se aplica la semejanza de triángulos al tronco de pirámide para calcular el lado de la base de la pirámide pequeña:



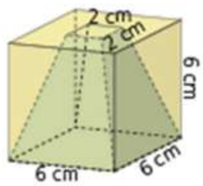
$\frac{3}{x} = \frac{9}{9} \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$

El lado de la pirámide pequeña mide 3 cm.

$$V = 9^3 + \frac{9^2 \cdot 12}{3} - \frac{3^2 \cdot 3}{3} = 729 + 324 - 9 = 1044 \Rightarrow V = 1044 \text{ cm}^3$$

15 Calcula el volumen que queda entre los siguientes cuerpos.

a.

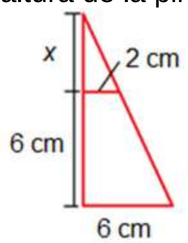


El volumen que queda entre los cuerpos es la diferencia entre el volumen del cubo menos el volumen del tronco de pirámide.

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{tronco de pirámide}} \Rightarrow V = a^3 - (V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}})$$

$$V = a^3 - \left(\frac{A_{\text{base pirámide grande}} \cdot h_{\text{pirámide grande}}}{3} - \frac{A_{\text{base pirámide pequeña}} \cdot h_{\text{pirámide pequeña}}}{3} \right)$$

Se aplica la semejanza de triángulos al tronco de pirámide para calcular la altura de la pirámide grande:

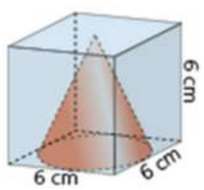


$\frac{x}{2} = \frac{x+6}{6} \Rightarrow 6x = 2 \cdot (x+6) \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$

La altura inicial de la pirámide es 6 + 3 = 9 cm.

$$V = 6^3 - \left(\frac{6^2 \cdot 9}{3} - \frac{2^2 \cdot 3}{3} \right) = 216 - (108 - 4) = 112 \Rightarrow V = 112 \text{ cm}^3$$

b.

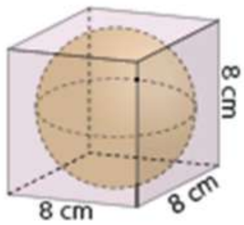


El volumen que queda entre los cuerpos es la diferencia entre el volumen del cubo menos el volumen del cono.

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{cono}} \Rightarrow V = a^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 6 = 216 - 56{,}52 = 159{,}48 \Rightarrow V = 159{,}48 \text{ cm}^3$$

c.

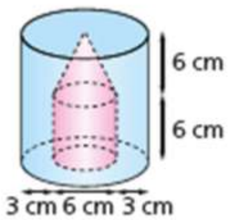


El volumen que queda entre los cuerpos es la diferencia entre el volumen del cubo menos el volumen de la esfera.

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{esfera}} \Rightarrow V = a^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = 8^3 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3 = 512 - 267{,}95 = 244{,}05 \Rightarrow V = 244{,}05 \text{ cm}^3$$

d.



El volumen que queda entre los cuerpos es la diferencia entre el volumen del cilindro grande menos la suma del volumen del cilindro pequeño y el volumen del cono.

$$V = V_{\text{cilindro grande}} - (V_{\text{cilindro pequeño}} + V_{\text{cono}}) \Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \left(\pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

$$V = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 12 - \left(3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 6 \right) = 1356{,}48 - (169{,}56 + 56{,}52)$$

$$V = 1356{,}48 - 226{,}08 = 1130{,}4 \Rightarrow V = 1130{,}4 \text{ cm}^3$$

EVALUACIÓN

1 El área, en centímetros cuadrados, de un pentágono regular de 16 cm de lado y que tiene un radio de 13,61 cm es:

a. 120,75 **b. 180** c. 440,42 **d. 290,23**

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema del pentágono:

$$ap = \sqrt{13{,}61^2 - 8^2} = \sqrt{185{,}23 - 64} = \sqrt{121{,}23} = 11{,}01 \Rightarrow ap = 11{,}01 \text{ cm}$$

$$A_{\text{pentágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{5 \cdot 16 \cdot 11{,}01}{2} = 440{,}4 \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = 440{,}4 \text{ cm}^2$$

2 El área, en decímetros cuadrados, de un sector circular de 100º de amplitud y 6 dm de radio es:

a. π b. 10π **c. 20π** **d. 30π**

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 100º}{360º} = 10\pi \Rightarrow A_{\text{sector circular}} = 10\pi \text{ dm}^2$$

3 El área, en metros cuadrados, de un trapecio circular de 90º de amplitud y cuyos radios miden 5 m y 3 m, respectivamente, es:

a. π **b. 2π** **c. 3π** d. 4π

$$A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{A}}{360º} \Rightarrow A_{\text{trapecio circular}} = \frac{\pi \cdot (5^2 - 3^2) \cdot 90º}{360º} = 4\pi$$

$$A_{\text{trapecio circular}} = 4\pi \text{ m}^2$$

4 El área, en centímetros cuadrados, de un prisma heptagonal regular de 10 cm de arista básica, 10,38 cm de apotema básica y 7 cm de altura es:

a. 1 120,44 b. 1 216,6 **c. 620,01** **d. 820,93**

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 10 \cdot 10{,}38}{2} + 7 \cdot 10 \cdot 7 = 726{,}6 + 490 = 1216{,}6 \Rightarrow A_{\text{total}} = 1216{,}6 \text{ cm}^2$$

5 El volumen, en centímetros cúbicos, de una pirámide cuadrangular regular de 4 cm de arista básica y 12 cm de apotema es:

a. 63,1 **b. 79,8** **c. 46,2** **d. 82,5**

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura de la pirámide:

$$h = \sqrt{12^2 - 2^2} = \sqrt{140} = 11{,}83 \Rightarrow h = 11{,}83 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 11{,}83 = 63{,}09 \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = 63{,}09 \text{ cm}^3$$

6 El área, en centímetros cuadrados, de una esfera de 20 cm de diámetro es:

a. 100π **b. 200π** c. 400π **d. 800π**

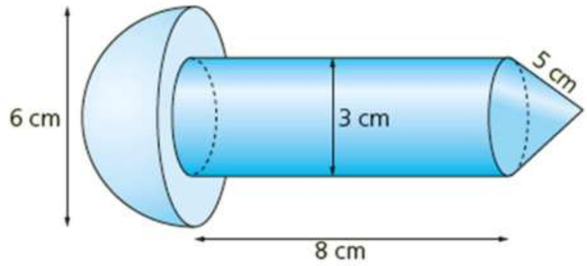
$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi \Rightarrow A_{\text{esfera}} = 400\pi \text{ cm}^2$$

7 El área, en metros cuadrados, de un cilindro de 1 m de radio y 3 m de altura es:

a. 5π b. 8π **c. 10π** **d. 12π**

$$A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h) \Rightarrow A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot (1 + 3) = 8\pi \Rightarrow A_{\text{cilindro}} = 8\pi \text{ m}^2$$

8 El volumen de la siguiente figura es:



a. 124,27 cm^3 **b. 34,25 cm^3** **c. 39,58 cm^3** **d. 42,87 cm^3**

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono:

$h=\sqrt{5^2-1{,}5^2}=\sqrt{22{,}75}=4{,}77 \Rightarrow h=4{,}77 \text{ cm}$

$$V=\frac{V_{\text{esfera}}}{2}+V_{\text{cilindro}}+V_{\text{cono}} \Rightarrow V=\frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3}{2}+\pi\cdot r^2\cdot h+\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$

$$V=\frac{\frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 3^3}{2}+3{,}14\cdot 1{,}5^2\cdot 8+\frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5^2\cdot 4{,}77$$

$$V=56{,}52+56{,}52+11{,}23=124{,}27 \Rightarrow V=124{,}27 \text{ cm}^3$$