MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 3. Ecuaciones e inecuaciones

Unidad 3. Ecuaciones e inecuaciones

SOLUCIONES PÁG. 69

1 Resuelve estas ecuaciones:

a. $\mathbf{2x - 3 + 7x + 1 = -4x + 5 + 6x}$

$2x + 7x + 4x - 6x = 5 + 3 - 1 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

b. $\mathbf{-4x + 11 + x - 2 + 3x - 6 + 3x = 0}$

$-4x + x + 3x + 3x = 0 - 11 + 2 + 6 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

c. $\mathbf{6 + 3x - 2 + 5x = 1 + 8x - 7}$

$3x + 5x - 8x = 1 - 7 - 6 + 2 \Rightarrow 0 \neq -10 \Rightarrow$ Sin solución.

d. $\mathbf{5x + 9 - 3x - 7 + x = -3x + 2 + 6x}$

$5x - 3x + x + 3x - 6x = 2 + 7 - 9 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Infinitas soluciones.

2 Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{2 \cdot (x - 3) + 5 \cdot (-4 + 3x) = -(6x + 3)}$

$2x - 6 - 20 + 15x = -6x - 3$

$2x + 15x + 6x = -3 + 6 + 20$

$23x = 23 \Rightarrow x = 1$

b. $\mathbf{-2 + 4 \cdot (-2x + 5) = -2x + 18 - 6x}$

$-2 - 8x + 20 = -2x + 18 - 6x$

$-2 + 20 - 18 = -2x - 6x + 8x$

$0 = 0 \Rightarrow$ Infinitas soluciones.

c. $\mathbf{4x - (x - 7) + (-2x - 1) = 3 \cdot (5x + 2)}$

$4x - x + 7 - 2x - 1 = 15x + 6$

$4x - x - 2x - 15x = 6 - 7 + 1$

$-14x = 0 \Rightarrow x = 0$

d. $\mathbf{-5 \cdot (3x - 4) + 6 \cdot (8 - x) - (-3x + 2) = 0}$

$-15x + 20 + 48 - 6x + 3x - 2 = 0$

$$-18x = -66 \Rightarrow x = \frac{-66}{-18} = \frac{11}{3}$$

e. $\mathbf{7 - [5x + 2 \cdot (-4x + 8)] = 3 \cdot (-10 - x)}$

$7 - 5x + 8x - 16 = -30 - 3x$

$-5x + 8x + 3x = -30 - 7 + 16$

$6x = -21 \Longrightarrow x = \frac{-21}{6} = -\frac{7}{2}$

3 **Calcula la solución de estas ecuaciones:**

a. $\mathbf{\frac{5x}{9} - 1 = \frac{7x}{6} + \frac{3}{8}}$

$\frac{5}{9}x - \frac{7}{6}x = \frac{3}{8} + 1$

$-\frac{11}{18}x = \frac{11}{8} \Rightarrow x = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}$

b. $\mathbf{\frac{x-2}{10} - \frac{x+3}{4} = \frac{2x-7}{8}}$

$\frac{2x - 4 - 5x - 15}{20} = \frac{2x-7}{8}$

$\frac{-3}{20}x - \frac{19}{20} = \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}$

$\frac{-3}{20}x - \frac{1}{4}x = -\frac{7}{8} + \frac{19}{20}$

$\frac{-2}{5}x = \frac{3}{40} \Rightarrow x = -\frac{15}{80} = -\frac{3}{16}$

c. $\mathbf{2 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right) = 5 - 3 \cdot (2x + 4)}$

$\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = 5 - 6x - 12$

$\frac{2}{3}x + 6x = -7 + \frac{1}{2}$

$\frac{20}{3}x = -\frac{13}{2} \Rightarrow x = -\frac{39}{40}$

d. $\mathbf{2x - \frac{3 \cdot (5x - 1)}{10} = \frac{x+4}{5} - \frac{1}{3}}$

$2x - \frac{15x - 3}{10} = \frac{x}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{3}$

$2x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{5}x = \frac{7}{15} - \frac{3}{10}$

$\frac{3}{10}x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{9}$

e. $\dfrac{-5x}{6}-\dfrac{3\cdot(x+3)}{4}=x+\dfrac{5\cdot(2x+3)}{15}$

$$\frac{-5}{6}x-\frac{3x+9}{4}=\frac{15x+10x+15}{15}$$
$$\frac{-19}{12}x-\frac{9}{4}=\frac{25}{15}x+1$$
$$-\frac{19}{12}x-\frac{5}{3}x=1+\frac{9}{4}$$
$$-\frac{13}{4}x=\frac{13}{4}\Rightarrow x=-1$$

f. $-3x+\dfrac{5}{2}\cdot(x-2)=\dfrac{4}{5}\cdot(10-5x)+1$

$$-3x+\frac{5}{2}x-5=\frac{40}{5}-\frac{20}{5}x+1$$
$$-\frac{1}{2}x-5=8-4x+1$$
$$\frac{7}{2}x=14\Rightarrow x=4$$

SOLUCIONES PÁG. 71

4 **Indica el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones sin resolverlas:**

Se debe comprobar el signo del discriminante de la ecuación ax^2+bx+c,

$\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

a. $-x^2+2x+15=0$

$\Delta = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 15 = 64 > 0 \Longrightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

b. $3x^2-6x+3=0$

$\Delta = 6^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 0 \Longrightarrow$ Una solución real doble.

c. $4x^2+5x+7=0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot 4\cdot 7 = -87 < 0 \Longrightarrow$ Ninguna solución real.

d. $9x^2 + 30x + 25 = 0$

$\Delta = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0 \Longrightarrow$ Una solución real doble.

e. $-2x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = -36 < 0 \Longrightarrow$ Ninguna solución real.

f. $4x^2 + 16x + 15 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16 > 0 \Longrightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

g. $-2x^2 - 7x + 4 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4 = 81 > 0 \Longrightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

h. $-x^2 - x - 5 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -19 < 0 \Longrightarrow$ Ninguna solución real.

5 Resuelve las ecuaciones de la actividad anterior y comprueba que el número de soluciones coincide en ambas actividades.

a. $-x^2 + 2x + 15 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 15}}{-2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$x_1 = -3$, $x_2 = 5 \Rightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

b. $3x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 0}{6} = 1$$

$x = 1 \Rightarrow$ Una solución real doble.

c. $4x^2 + 5x + 7 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7}}{2 \cdot 4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-87}}{8}$$

Sin solución.

d. $9x^2 + 30x + 25 = 0$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25}}{2 \cdot 9} = \frac{-30 \pm 0}{18} = \frac{-5}{3}$$

$x = \dfrac{-5}{3} \Rightarrow$ Una solución real doble.

e. $-2x^2 + 6x - 9 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{-2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{4} \Rightarrow \text{Sin solución.}$$

f. $\mathbf{4x^2 + 16x + 15 = 0}$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{-16 \pm 4}{8}$$

$x_1 = \frac{-3}{2}$; $x_2 = \frac{-5}{2} \Rightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

g. $\mathbf{-2x^2 - 7x + 4 = 0}$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{-2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-4} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -4 \Rightarrow$ Dos soluciones reales distintas.

h. $\mathbf{-x^2 - x - 5 = 0}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{-2}$$

Sin solución.

6 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{-5x^2 + x = 0}$

$$x \cdot (-5x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -5x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

b. $\mathbf{x^2 - 4 = 0}$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -2$

c. $\mathbf{x^2 - 7 = 0}$

$x^2 - 7 = 0$

$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x_1 = \sqrt{7}$; $x_2 = -\sqrt{7}$

d. $\mathbf{9x^2 = 1}$

$9x^2 = 1$

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = -\frac{1}{3}$$

e. $\mathbf{5x \cdot (5x - 2) = 4 - 10x}$

$5x \cdot (5x - 2) = 4 - 10x$

$25x^2 - 10x = 4 - 10x$

$$25x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{25}} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5};\ x_2 = -\frac{2}{5}$$

f. $\mathbf{4 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) = 2x^2 - 4x + 6}$

$4 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) = 2x^2 - 4x + 6$

$(4x + 8) \cdot (x - 1) = 2x^2 - 4x + 6$

$4x^2 - 4x + 8x - 8 = 2x^2 - 4x + 6$

$2x^2 + 8x - 14 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 2 \cdot 14}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm \sqrt{176}}{4} = \frac{-8 \pm 2^2\sqrt{11}}{4} = -2 \pm \sqrt{11}$$

$x_1 = -2 + \sqrt{11}$; $x_2 = -2 - \sqrt{11}$

g. $\mathbf{(x + 1)^2 = x + 1}$

$(x + 1)^2 = x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = x + 1$

$x^2 + x = 0$

$$x \cdot (x + 1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

h. $\mathbf{4x^2 + 2x = 5x}$

$4x^2 + 2x = 5x$

$4x^2 - 3x = 0$

$$x \cdot (4x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

7 Indica una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

La suma, S, de las soluciones de la ecuación, $x_1 + x_2$, es igual a $\frac{-b}{a}$.

El producto, P, de las soluciones de la ecuación, $x_1 + x_2$, es igual a $\frac{c}{a}$.

Se plantean este par de ecuaciones para hallar los coeficientes de cada ecuación:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

a. 3 y 5

$$\begin{cases} 3+5=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow 8=\dfrac{-b}{a};\ 8a=-b \\ 3\cdot 5=\dfrac{c}{a}\Rightarrow 15=\dfrac{c}{a};\ 15a=c \end{cases}$$

Si a = 1 ⟹ b = –8; c = 15

La ecuación es: $x^2 - 8x + 15 = 0$

b. –2 y 7

$$\begin{cases} -2+7=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow 5=\dfrac{-b}{a};\ 5a=-b \\ -2\cdot 7=\dfrac{c}{a}\Rightarrow -14=\dfrac{c}{a};\ -14a=c \end{cases}$$

Si a = 1 ⟹ b = –5; c = 14

La ecuación es: $x^2 - 5x - 14 = 0$

c. $\frac{1}{3}$ y –4

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}-4=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow -\dfrac{11}{3}=\dfrac{-b}{a};\ \dfrac{11}{3}a=b \\ \dfrac{1}{3}\cdot(-4)=\dfrac{c}{a}\Rightarrow -\dfrac{4}{3}=\dfrac{c}{a};\ -\dfrac{4}{3}a=c \end{cases}$$

Si a = 3 ⟹ b = 11; c = –4

La ecuación es: $3x^2 + 11x - 4 = 0$

d. $\frac{-2}{5}$ y $\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow 0=\dfrac{b}{a};\ b=0 \\ -\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{c}{a}\Rightarrow -\dfrac{4}{25}=\dfrac{c}{a};\ -\dfrac{4}{25}a=c \end{cases}$$

Si a = 25 ⟹ b = 0; c = –4

La ecuación es: $25x^2 - 4 = 0$

8 **Halla el valor de los coeficientes *b* y *c* de la ecuación $3x^2 + bx + c = 0$, sabiendo que sus soluciones son –2 y 4.**

$$\begin{cases} -2+4=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow 2=\dfrac{-b}{a};\ 2a=-b \\ -2\cdot 4=\dfrac{c}{a}\Rightarrow -8=\dfrac{c}{a};\ 8a=-c \end{cases}$$

Si a = 3 ⟹ b = –6, c = –24

La ecuación es: $3x^2 - 6x - 24 = 0$

9 Busca información en Internet sobre la clasificación de las ecuaciones de segundo grado establecida por el matemático Al-Khwarizmi en el siglo VIII d. C.

Respuesta abierta.

10 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{(4x + 3) \cdot (6x - 3) - 1 = (2x + 1)^2 - 5}$

$24x^2 - 12x + 18x - 9 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 5$

$20x^2 + 2x - 6 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-6)}}{2 \cdot 20} = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{40} = \frac{-2 \pm 22}{40}$$

$$x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = \frac{1}{2}$$

b. $\mathbf{(6x - 1)^2 - (5x - 2)^2 = 16}$

$36x^2 - 12x + 1 - (25x^2 - 20x + 4) = 16$

$11x^2 + 8x - 19 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 11 \cdot 19}}{2 \cdot 11} = \frac{-8 \pm \sqrt{900}}{22} = \frac{-8 \pm 30}{22}$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{-19}{11}$$

c. $\mathbf{(x + 4)^2 = 8x + (2x - 1)^2}$

$x^2 + 8x + 16 = 8x + 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 4x - 15 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = \frac{-5}{3}$$

11 Encuentra las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{\frac{3 \cdot (x^2 - 11)}{5} - \frac{2 \cdot (x^2 - 60)}{7} = 0}$

$$\frac{3x^2 - 33}{5} - \frac{2x^2 - 120}{7} = \frac{21x^2 - 231 - 10x^2 + 600}{35} = \frac{11x^2 + 369}{35} = 0 \Rightarrow 11x^2 + 369 = 0$$

No tiene solución real.

b. $\dfrac{\boldsymbol{2x^2-1}}{\mathbf{2}}-\dfrac{\boldsymbol{x-1}}{\mathbf{3}}=\dfrac{\boldsymbol{1-x}}{\mathbf{6}}$

$$\frac{6x^2-3-2x+2}{6}=\frac{1-x}{6}$$

$$6x^2-2x-1=1-x$$

$$6x^2-x-2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{1\pm 7}{12}$$

$$x_1=\frac{2}{3};x_2=-\frac{1}{2}$$

c. $\dfrac{\boldsymbol{(x-2)\cdot(x+2)}}{\mathbf{4}}-\dfrac{\boldsymbol{(x-3)^2}}{\mathbf{3}}=\dfrac{\boldsymbol{x\cdot(11-x)}}{\mathbf{6}}$

$$\frac{x^2-4}{4}-\frac{x^2-6x+9}{3}=\frac{11x-x^2}{6}$$

$$\frac{3x^2-12-4x^2+24x-36}{12}=\frac{22x-2x^2}{12}$$

$$-x^2+24x-48=-2x^2+22x$$

$$x^2+2x-48=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{-2\pm 14}{2}=-1\pm 7$$

$x_1 = 6$; $x_2 = -8$

d. $\dfrac{\boldsymbol{(x-1)^2}}{\mathbf{2}}-\dfrac{\boldsymbol{(1+2x)^2}}{\mathbf{3}}=\mathbf{-2}-\dfrac{\boldsymbol{(2x-1)\cdot(2x+1)}}{\mathbf{3}}$

$$\frac{x^2-2x+1}{2}-\frac{1+4x+4x^2}{3}=-2-\frac{4x^2-1}{3}$$

$$\frac{3x^2-6x+3-2-8x-8x^2}{6}=\frac{-12-8x^2+2}{6}$$

$$-5x^2-14x+1=-10-8x^2$$

$$3x^2-14x+11=0$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 3\cdot 11}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{14\pm 8}{6}$$

$x_1=\dfrac{11}{3}$; $x_2=1$

SOLUCIONES PÁG. 73

12 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- Se hace el cambio de variable, $x^2 = t$
- Se resuelve la ecuación de segundo grado
- Se deshace el cambio de variable, $x = \pm\sqrt{t}$

a. $\boldsymbol{x^4 - 29x^2 + 100 = 0}$

$t^2 - 29t + 100 = 0$

$$t = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2} \begin{cases} t_1 = 25 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

- $t_1 = 25$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{25} = 5$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{25} = -5$

- $t_2 = 4$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{4} = -2$

b. $\boldsymbol{9x^4 - 8x^2 = 1}$

$9t^2 - 8t - 1 = 0$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{18} = \frac{8 \pm 10}{18}$$

- $t_1 = 1$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

- $t_2 = -\frac{1}{9}$ $\Longrightarrow$No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

c. $\boldsymbol{x^4 + 14x^2 + 45 = 0}$

$t^2 + 14t + 45 = 0$

$$t = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1} = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-14 \pm 4}{2}$$

$t_1 = -5$, $t_2 = -9$

No hay soluciones reales de $x = \pm\sqrt{t}$, pues los dos valores de t son negativos.

d. $-9x^4 + 148x^2 - 64 = 0$

$-9t^2 + 148t - 64 = 0$

$$t = \frac{-148 \pm \sqrt{148^2 - 4 \cdot 9 \cdot 64}}{-2 \cdot 9} = \frac{148 \pm \sqrt{19600}}{18} = \frac{148 \pm 140}{18}$$

- $t_1 = 16$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{16} = 4$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{16} = -4$

- $t_2 = \frac{4}{9}$

  $x_3 = \sqrt{t_2} = \frac{2}{3}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\frac{2}{3}$

e. $9x^2 - 68 = -2x^4$

$2x^4 + 9x^2 - 68 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 9t - 68 = 0$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 68}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-9 \pm 25}{4}$$

- $t_1 = 4$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{4} = -2$

- $t_2 = -17$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

f. $-x^4 + 48x^2 + 49 = 0$

$-t^2 + 48t + 49 = 0$

$$t = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot (-1)} = \frac{48 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{48 \pm 50}{2}$$

- $t_1 = 49$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{49} = 7$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{49} = -7$

- $t_2 = -1$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

g. $36x^4 = 13x^2 - 1$

$36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 36t^2 - 13t + 1 = 0$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1}}{2 \cdot 36} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{72} = \frac{13 \pm 5}{72}$$

- $t_1 = \dfrac{1}{4}$

  $x_1 = +\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

  $x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$

- $t_2 = \dfrac{1}{9}$

  $x_3 = +\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

  $x_4 = -\sqrt{\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{1}{3}$

h. $x^4 - x^2 - 12 = 0$

$t^2 - t - 12 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

- $t_1 = 4$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{4} = -2$

- $t_2 = -3$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

i. $-4x^4 + 13x^2 - 3 = 0$

$-4t^2 + 13t - 3 = 0$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-8} = \frac{13 \pm 11}{8}$$

- $t_1 = 3$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{3}$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{3}$

- $t_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

  $x_3 = +\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

  $x_4 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

j. $\boldsymbol{x^4 - 7x^2 + 10 = 0}$

$t^2 - 7t + 10 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

- $t_1 = 5$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{5}$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{5}$

- $t_2 = 2$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{2}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{2}$

13 Actividad resuelta.

14 Aplica un cambio de variable y resuelve la ecuación bicuadrada $2x^4 - 162 = 0$. ¿Podrías resolverla sin necesidad de hacer un cambio de variable? En caso afirmativo, explica el procedimiento empleado.

$2x^4 - 162 = 0 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow 2t^2 - 162 = 0$

$2t^2 = 162 \Rightarrow t^2 = \frac{162}{2} = 81 \Rightarrow t = \pm 9$

Se deshace el cambio de variable, $x_1 = +\sqrt{9} = 3$; $x_2 = -\sqrt{9} = -3$

Para resolverla sin hacer un cambio de variable, se despeja la x directamente:

$2x^4 = 162 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} \Rightarrow x_1 = +3$, $x_2 = -3$.

15 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a. $\boldsymbol{x^4 - 16 = 0}$

$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -2$

b. $49x^4 - 36x^2 = 0$

$x^2 \cdot (49x^2 - 36) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$49x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 49x^2 = 36;\ x^2 = \frac{36}{49} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{36}{49}}; x_2 = \frac{6}{7}; x_3 = -\frac{6}{7}$

c. $3x^4 + 3 = 0$

$3x^4 = -3;\ x^4 = -1 \Rightarrow$ Sin solución.

d. $-4x^4 + 121x^2 = 0$

$x^2 \cdot (-4x^2 + 121) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-4x^2 + 121 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 121;\ x^2 = \frac{121}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{121}{4}}; x_2 = \frac{11}{2}; x_3 = -\frac{11}{2}$

e. $-18x^4 = -10x^2$

$-18x^4 + 10x^2 = 0;$

$x^2 \cdot (-18x^2 + 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-18x^2 + 10 = 0 \Rightarrow 18x^2 = 10;\ x^2 = \frac{10}{18} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{18}}; x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}; x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

f. $16x^4 - 1 = 0$

$16x^4 = 1;\ x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}}; x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$

g. $-2x^4 - 1\,250 = 0$

$2x^4 = -1\,250;\ x^4 = -625 \Rightarrow$ Sin solución.

h. $x^4 - x^2 = 0$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1;\ x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x_2 = 1;\ x_3 = -1$

i. $81x^4 = -25$

$x^4 = -\frac{25}{81} \Rightarrow$ Sin solución.

j. $-5x^4 + 10 = 0$

$5x^4 = 10;\ x^4 = \frac{10}{5} = 2; x = \pm\sqrt[4]{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{2}; x_2 = -\sqrt[4]{2}$

16 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- Si es necesario, se hace el cambio de variable, $x^n = t$
- Se resuelve la ecuación con la nueva variable, t.
- Se deshace el cambio de variable, $x = \pm\sqrt[n]{t}$

a. $\boldsymbol{x^6 - 7x^3 - 8 = 0}$

$x^3 = t \Longrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}$$

- $t_1 = 8$

  $x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{8} = 2$

- $t_2 = -1$

  $x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-1} = -1$

b. $\boldsymbol{x^6 - 28x^3 + 27 = 0}$

$x^3 = t \Longrightarrow t^2 - 28t + 27 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{28 \pm 26}{2} = 14 \pm 13$$

- $t_1 = 27$

  $x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{27} = 3$

- $t_2 = 1$

  $x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{1} = 1$

c. $\boldsymbol{-8x^6 + 63x^3 = -8}$

$-8x^6 + 63x^3 + 8 = 0$

$x^3 = t \Longrightarrow -8t^2 + 63t + 8 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{-63 \pm \sqrt{63^2 + 4 \cdot 8 \cdot 8}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-63 \pm \sqrt{4225}}{-16} = \frac{63 \pm 65}{16}$$

- $t_1 = 8$

  $x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{8} = 2$

- $t_2 = -\frac{1}{8}$

  $x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

d. $\boldsymbol{-27x^6 - 26x^3 + 1 = 0}$

$x^3 = t \Longrightarrow -27t^2 - 26t + 1 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 + 4 \cdot 27 \cdot 1}}{2 \cdot (-27)} = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{-54} = \frac{26 \pm 28}{-54}$$

- $t_1 = -1$

  $x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{-1} = -1$

- $t_2 = \dfrac{1}{27}$

  $x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

e. $\boldsymbol{x^8 - 17x^4 + 16 = 0}$

$x^4 = t \Longrightarrow t^2 - 17t + 16 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

- $t_1 = 16$

  $x_1 = +\sqrt[4]{t_1} = +\sqrt[4]{16} = 2$

  $x_2 = -\sqrt[4]{t_1} = -\sqrt[4]{16} = -2$

- $t_2 = 1$

  $x_3 = +\sqrt[4]{t_2} = +\sqrt[4]{1} = 1$

  $x_4 = -\sqrt[4]{t_2} = -\sqrt[4]{1} = -1$

f. $\boldsymbol{x^{10} = 33x^5 - 32}$

$x^5 = t \Longrightarrow x^{10} - 33x^5 + 32 = 0 \quad \Longrightarrow t^2 - 33t + 32 = 0$

$$t = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{33 \pm 31}{2}$$

- $t_1 = 32$

  $x_1 = \sqrt[5]{t_1} = \sqrt[5]{32} = 2$

- $t_2 = 1$

  $x_2 = \sqrt[5]{t_2} = \sqrt[5]{1} = 1$

g. $\boldsymbol{x^6 + 8x^3 = 0}$

$x^3 \cdot (x^3 + 8) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$

$x^3 + 8 = 0 \Longrightarrow x^3 = -8$; $x_2 = \sqrt[3]{-8} = -2$

h. $\mathbf{-2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}\mathbf{ + 128 = 0}$

$2x^6 = 128 \Longrightarrow x^6 = \dfrac{128}{2} = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

i. $\mathbf{-3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{8}}\mathbf{ + 243}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}\mathbf{ = 0}$

$x^4 = t \Longrightarrow -3t^2 + 243t = 0$

$t \cdot (-3t + 243) = 0 \Longrightarrow t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-3t + 243 = 0 \Longrightarrow t_2 = 81$

$x_2 = +\sqrt[4]{t_2} = +\sqrt[4]{81} = 3$

$x_3 = -\sqrt[4]{t_2} = -\sqrt[4]{81} = -3$

j. $\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}\mathbf{ + 10 = 0}$

$x^3 = t \Longrightarrow t^2 + 10 = 0;\ t^2 = -10 \Longrightarrow$ Sin solución.

17 Escribe una ecuación bicuadrada cuyas soluciones sean:

Se toman las raíces y se expresa la ecuación como producto de factores:

a. ±2 y ±5

$(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 5) = 0$

$(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 25) = 0$

$x^4 - 25x^2 - 4x^2 + 100 = 0$

$x^4 - 29x + 100 = 0$

b. ±3

$(x + 3)^2 \cdot (x - 3)^2 = 0$

$(x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$

$x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

c. $\pm\sqrt{\mathbf{5}}$ **y** $\pm\sqrt{\mathbf{7}}$

$(x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{7}) \cdot (x - \sqrt{7}) = 0$

$(x^2 - 5) \cdot (x^2 - 7) = 0$

$x^4 - 7x^2 - 5x^2 + 35 = 0$

$x^4 - 12x^2 + 35 = 0$

d. $\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=0$$
$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)=0$$
$$x^4\cancel{-\frac{1}{2}x^3}+\frac{1}{16}x^2\cancel{+\frac{1}{2}x^3}-\frac{1}{4}x^2\cancel{+\frac{1}{32}x}+\frac{1}{16}x^2\cancel{-\frac{1}{32}x}+\frac{1}{256}=0$$
$$x^4-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{256}=0$$

18 Responde a las preguntas propuestas a continuación, razonando tu respuesta.

a. ¿Existe alguna ecuación bicuadrada cuyas únicas soluciones sean 0 y 2? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Si las únicas raíces de la ecuación bicuadrada fuesen 0 y 2 las posibilidades para formar una ecuación de grado 4 serían:

- $x \cdot (x - 2)^3 = 0$; es decir, $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = 0$, que no es una ecuación bicuadrada.
- $x^2 \cdot (x - 2)^2 = 0$; es decir $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$, que tampoco es bicuadrada.
- $x^3 \cdot (x - 2) = 0$; es decir $x^4 - 2x^3 = 0$, que tampoco es bicuadrada.

Por tanto, no existe ninguna ecuación bicuadrada con esas dos únicas raíces.

b. ¿Y alguna en la que al menos dos de sus soluciones sean 0 y 2? Si es posible, pon un ejemplo.

Si las raíces de la ecuación bicuadrada fuesen 0 y 2 y alguna más, por ejemplo, –2 se podría formar una ecuación bicuadrada de esta forma:

$x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$;

$x^4 - 4x^2 = 0$, cuyas soluciones son 0, 2 y – 2.

19 Encuentra las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) - 5x^2 = 32}$

$x^4 - 4 - 5x^2 = 32$

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = t \Longrightarrow t^2 - 5t - 36 = 0 \Longrightarrow$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

- $t_1 = 9$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{9} = 3$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{9} = -3$

- $t_2 = -4$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

b. $\mathbf{4x \cdot (3x^2 + 2x) - 1 = (3x^2 + 5x) \cdot (3x^2 - x) + 3x^2}$

$12x^3 + 8x^2 - 1 = 9x^4 - 3x^3 + 15x^3 - 5x^2 + 3x^2$

$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

$x^2 = t \Longrightarrow 9t^2 - 10t + 1 = 0 \Longrightarrow$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \frac{10 \pm 8}{18}$$

- $t_1 = 1$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

- $t_2 = \frac{1}{9}$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$

c. $\mathbf{-5x^2 \cdot (x^2 - 1) = 2x^2 \cdot (3 - 2x^2) + 8}$

$-5x^4 + 5x^2 = 6x^2 - 4x^4 + 8$

$x^4 + x^2 + 8 = 0$

$x^2 = t \Longrightarrow t^2 + t + 8 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{2} \Longrightarrow \text{Sin solución.}$$

d. $\mathbf{(x^2 - 3)^2 - 5 = 4 \cdot [(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 4x^2]}$

$x^4 - 6x^2 + 9 - 5 = 4x^4 - 4 - 16x^2$

$3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$

$x^2 = t \Longrightarrow 3t^2 - 10t - 8 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

- $t_1 = 4$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{4} = -2$

- $t_2 = -\dfrac{2}{3}$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

e. $\mathbf{2x^2 \cdot (x + 1)^2 = 4 \cdot (x^3 - 2x^2)}$

$2x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 4x^3 - 8x^2$

$2x^4 + 4x^3 + 2x^2 = 4x^3 - 8x^2$

$2x^4 + 10x^2 = 0$

$2x^4 + 10x^2 = 0$

$x^2 = t \Longrightarrow 2t^2 + 10t = 0 \Longrightarrow 2t \cdot (t + 5) = 0$

$t_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$

$t_2 = -5 \Longrightarrow$ No existe solución para x.

20 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{\dfrac{(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2)}{5} - 2 = \dfrac{2}{5}}$

$\dfrac{x^4 - 4}{5} = \dfrac{2}{5} + 2$

$\dfrac{x^4}{5} = \dfrac{2 + 10 + 4}{5}$

$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

$x_1 = -2,\ x_2 = 2$

b. $\mathbf{\frac{3\cdot(x^2+5)}{2}-\frac{(2x^2-1)^2}{4}=\frac{35}{2}}$

$$\frac{3x^2+15}{2}-\frac{4x^4-2x^2+1}{4}-\frac{35}{2}=0$$

$$-x^4+2x^2-\frac{41}{4}=0$$

Se hace el cambio de variable a $x^2 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$$-t^2+\ 2t-\frac{41}{2}=0\Rightarrow\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{41}{2}\right)}<0\Rightarrow\text{Sin solución real.}$$

c. $\mathbf{\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{2}-\frac{1}{3}=\frac{(x^2+3)\cdot(x^2-3)}{6}}$

$$\frac{x^2-1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{x^4-9}{6}$$

$$\frac{3x^2-3-2-x^4+9}{6}=0$$

$$-x^4+3x^2+4=0$$

Se hace el cambio de variable a $x^2 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$-t^2 + 3t + 4 = 0$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2}=\frac{-3\pm 5}{-2}$$

- $t_1 = 4$

  $x_1 =+\sqrt{t_1} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_2 =-\sqrt{t_1} = -\sqrt{4} = -2$

- $t_2 = -1$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

d. $\mathbf{\dfrac{(2x^2-3)^2}{5}=\dfrac{-19x^2+16}{9}}$

$$\frac{4x^4-12x^2+9}{5}+\frac{19x^2-16}{9}=0$$

$$\frac{36x^4-13x^2+1}{45}=0$$

$$36x^4-13x^2+1=0$$

Se hace el cambio de variable a $x^2 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$36t^2 - 13t + 1 = 0$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 36\cdot 1}}{2\cdot 36}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{72}=\frac{13\pm 5}{72}$$

- $t_1 = \dfrac{1}{4}$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$

- $t_2 = \dfrac{1}{9}$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{1}{3}$

e. $\mathbf{\dfrac{(3x^2+2)\cdot(3x^2-2)}{5}-\dfrac{(3x^2-1)^2}{4}=\dfrac{3\cdot(x^2-1)}{2}}$

$$\frac{9x^4-4}{5}-\frac{9x^4-6x^2+1}{4}=\frac{3x^2-3}{2}$$

$$\frac{36x^4-16-45x^4+30x^2-5-30x^2+30}{20}=0$$

$$-9x^4+9=0$$

$$x^4=1\Rightarrow x_1=1; x_2=-1$$

f. $\mathbf{\dfrac{2x^2\cdot(3x^2-5)}{3}-x^4=x^2\cdot(-25+x^2)}$

$$\frac{6x^4-10x^2-3x^4}{3}=\frac{-75x^2+3x^4}{3}$$

$$6x^4-10x^2-3x^4+75x^2-3x^4=0$$

$$65x^2=0\Rightarrow x=0$$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas en función de los parámetros *a* y *b* con a ≠ 0 y b ≠ 0:

a. $\boldsymbol{x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0}$

Se hace un cambio de variable a $x^2 = t$:

$$t^2 + 4abt - \left(a^2 - b^2\right)^2 = 0$$

$$t = \frac{-4ab \pm \sqrt{(4ab)^2 + 4\cdot 1\cdot\left(a^2 - b^2\right)^2}}{2} = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 + 4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4}}{2} =$$

$$= \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 + 4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4}}{2} = \frac{-4ab \pm \sqrt{4a^4 + 4b^4 + 8a^2b^2}}{2} =$$

$$= \frac{-4ab \pm \sqrt{4(a^2 + b^2)^2}}{2} = \frac{-4ab \pm 2(a^2 + b^2)}{2} = -2ab \pm (a^2 + b^2)$$

- $t_1 = -2ab + a^2 + b^2 = (a - b)^2$

  $x = \sqrt{t_1} = \sqrt{(a-b)^2} = \pm(a-b)$

- $t_2 = -2ab - a^2 - b^2 = -(a + b)^2$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

b. $\boldsymbol{a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0}$

Se hace un cambio de variable a $x^2 = t$

$$a^2b^2t^2 - \left(a^4 + b^4\right)t + a^2b^2 = 0$$

$$t = \frac{\left(a^4 + b^4\right) \pm \sqrt{\left(a^4 + b^4\right)^2 - 4\cdot a^2b^2\cdot a^2b^2}}{2\cdot a^2b^2} =$$

$$= \frac{\left(a^4 + b^4\right) \pm \sqrt{a^8 + b^8 + 2a^4b^4 - 4\cdot a^4b^4}}{2a^2b^2} = \frac{\left(a^4 + b^4\right) \pm \sqrt{a^8 + b^8 - 2a^4b^4}}{2a^2b^2} =$$

$$= \frac{\left(a^4 + b^4\right) \pm \sqrt{(a^4 - b^4)^2}}{2a^2b^2} = \frac{\left(a^4 + b^4\right) \pm (a^4 - b^4)}{2a^2b^2}$$

$$t_1 = \frac{a^4 + b^4 + a^4 - b^4}{2a^2b^2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow x_1 = +\frac{a}{b}; x_2 = -\frac{a}{b}$$

$$t_2 = \frac{a^4 + b^4 - a^4 + b^4}{2a^2b^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow x_3 = +\frac{b}{a}; x_4 = -\frac{b}{a}$$

22 Determina el valor de *m* en la ecuación $\boldsymbol{x^4 - 3x^2 + m = 0}$ sabiendo que dos de sus soluciones son 2 y –2.

Se hace un cambio de variable a $x^2 = t \Longrightarrow$ Si $x_1 = 2$, entonces $t = 4$

$t^2 - 3t + m = 0;$

$4^2 - 3 \cdot 4 + m = 0;$

$16 - 12 = m \Longrightarrow m = -4$

Se comprueba con la otra solución, $x = -2$:

$(-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow 16 - 12 - 4 = 0$

23 Sea la ecuación ax^4 – 10x^2 + 1 = 0, ¿existe algún valor de a para el que la ecuación tenga únicamente dos soluciones reales? ¿Y para que no tenga solución real? En el caso de que existan, determina las soluciones.

Para que la ecuación tenga únicamente dos soluciones reales:

- Se hace el cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow at^2 - 10t + 1 = 0$
- Se observa el signo del discriminante de la ecuación de segundo grado, de modo que cumpla la condición de una única solución real, de modo que la ecuación de cuarto grado tenga dos soluciones reales: las dos raíces de esa única solución real de la ecuación de segundo grado.

  $b^2 - 4ac = 0$

  $10^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 0 \Rightarrow 4a = 100;\ a = 25$

- Se hallan las soluciones:

  $25t^2 - 10t + 1 = 0 \Rightarrow$

  $$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25}}{2 \cdot 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

  $$t = \frac{1}{5} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}; x_2 = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Para que no tenga ninguna solución real, el discriminante de la ecuación con la variable en *t,* at^2 – 10t + 1 = 0, debe cumplir la condición:

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot a \cdot 1 < 0$

$\Delta = 100 - 4a < 0 \Rightarrow a > 25.$

SOLUCIONES PÁG. 75

24 Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones:

Como las ecuaciones están factorizadas, las raíces se obtienen igualando a cero cada uno de sus factores:

a. $\boldsymbol{x^2 \cdot (3x - 6) \cdot (2x^2 - 18) = 0}$

- $x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
- $3x - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$
- $2x^2 - 18 = 0;\ x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = 3;\ x_4 = -3$

b. $\boldsymbol{(-5x + 3) \cdot (4x^2 + 10x) \cdot (x^2 + 1) = 0}$

- $-5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}$
- $4x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ Sin solución.

25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

Se descompone el polinomio en factores y se hallan las raíces:

a. $\boldsymbol{x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0}$

Se utiliza la regla de Ruffini para encontrar factores:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 5 & & 5 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

(x – 5) es un factor.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(x – 1) es otro factor.

(x + 1) es otro factor.

Luego $x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$.

De modo que las raíces son $x_1 = 5$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$

b. $\boldsymbol{3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0}$

Se utiliza la regla de Ruffini para encontrar factores:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ 2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & 0 \end{array}$$

(x – 2) es un factor.

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 13 & 4 \\ -4 & & -12 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

(x + 4) es un factor.

(3x + 1) es un factor.

Luego $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = (x - 2) \cdot (x + 4) \cdot (3x + 1) = 0$.

De modo que las raíces son $x_1 = 2$; $x_2 = -4$; $x_3 = -\dfrac{1}{3}$

c. $\boldsymbol{5x^3 + 13x^2 - 6x = 0}$

$x \cdot (5x^2 + 13x - 6) = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$\frac{-13 \pm \sqrt{13^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{-13 \pm 17}{10}$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{2}{5}; x_3 = -3$$

26 Resuelve estas ecuaciones:

a. $\mathbf{\frac{1}{x-3}+\frac{4x}{x+2}=\frac{2}{x}}$

m.c.m. $(x-3, x+2, x) = x\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4x}{x+2}=\frac{2}{x}\Rightarrow\frac{x\cdot(x+2)+4x^2\cdot(x-3)-2\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+2)}=0$$

$x^2 + 2x + 4x^3 – 12x^2 – 2x^2 + 2x + 12 = 0$

$4x^3 – 13x^2 + 4x + 12 = 0$

Se factoriza la ecuación para hallar las raíces:

	4	–13	4	12
2		8	–10	–12
	4	–5	–6	0
2		8	6	
	4	3	0	

(x – 2) es un factor doble.

(4x + 3) es un factor.

Luego $4x^3 – 13x^2 + 4x + 12 = (x – 2)^2 \cdot (4x + 3) = 0$.

De modo que las raíces son $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{3}{4}$

b. $\mathbf{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{4}{x^4}=0}$

$$\frac{3x^3-x^2-12x+4}{x^4}=0\Rightarrow 3x^3-x^2-12x+4=0$$

Se utiliza la regla de Ruffini para encontrar factores:

	3	–1	–12	4
2		6	10	–4
	3	5	–2	0

(x – 2) es un factor.

	3	5	–2
–2		–6	2
	3	–1	0

(x + 2) es un factor.

(3x – 1) es un factor.

Luego $3x^3 – x^2 + 12x + 4 = (x – 2) \cdot (x + 2) \cdot (3x – 1) = 0$.

De modo que las raíces son $x_1 = 2$; $x_2 = –2$; $x_3 = \frac{1}{3}$

c. $\mathbf{\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{x-4}{x+1}}$

m.c.m. (x^2 – 1, x + 1) = m.c.m. ((x + 1) · (x – 1), x + 1) = (x + 1) · (x – 1)

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{3x}{x+1}=\frac{x-4}{x+1}\Rightarrow\frac{1-3x\cdot(x-1)-(x-4)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=0\Rightarrow\frac{-4x^2+8x-3}{(x+1)\cdot(x-1)}=0$$

$-4x^2 + 8x - 3 = 0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot4\cdot3}}{-2\cdot4}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{8\pm4}{8}$$

$x_1=\dfrac{3}{2}; x_2=\dfrac{1}{2}$

d. $\mathbf{\dfrac{3x}{x^2-4x}+1=\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x+1}{x^2}}$

m.c.m. (x^2 – 4x, x – 4, x^2) = x^2 · (x – 4)

$$\frac{3x}{x^2-4x}+1=\frac{x}{x-4}-\frac{x+1}{x^2}\Rightarrow\frac{3x^2+x^2\cdot(x-4)-x^3+(x+1)\cdot(x-4)}{x^2\cdot(x-4)}=0$$

$3x^2+x^3-4x^2-x^3+x^2-3x-4=0$

$-3x-4=0\Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}$

SOLUCIONES PÁG. 77

27 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{\sqrt{5x+1}=7-x}$

$$\left(\sqrt{5x+1}\right)^2=(7-x)^2\Rightarrow5x+1=49+x^2-14x\Rightarrow x^2-19x+48=0$$

$$x=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\cdot1\cdot48}}{2\cdot1}=\frac{19\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{19\pm13}{2}$$

x_1 = 16; x_2 = 3. Solo cumple la ecuación inicial x_2 = 3.

b. $\mathbf{x=\sqrt{3x^2-4x}}$

$$x^2=\left(\sqrt{3x^2-4x}\right)^2\Rightarrow x^2=3x^2-4x\Rightarrow2x^2-4x=0\Rightarrow x\cdot(2x-4)=0$$

x_1 = 0; x_2= 2. Las dos soluciones cumplen la ecuación inicial.

c. $\sqrt{\boldsymbol{x^2+5}}+\mathbf{6}=\mathbf{3}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}$

$$\sqrt{x^2+5}=3-3x-6\Rightarrow\sqrt{x^2+5}=-3x-3=-3\cdot(x+1)\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2=9\cdot(x+1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+5=9\cdot(x^2+2x+1)\Rightarrow 8x^2+18x+4=0\Rightarrow 4x^2+9x+2=0$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot4\cdot2}}{8}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8}$$

$x_1=-\frac{1}{4}$; x_2= –2. Solo cumple la ecuación inicial x_2 = –2.

d. $\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}=\mathbf{7}$

$$2x-7=\sqrt{x-3}\Rightarrow(2x-7)^2=\left(\sqrt{x-3}\right)^2\Rightarrow 4x^2-28x+49=x-3$$

$$4x^2-29x+52=0$$

$$x=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4\cdot4\cdot52}}{2\cdot4}=\frac{29\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{29\pm3}{8}$$

x_1 = 4; $x_2=\frac{13}{4}$. Solo cumple la ecuación inicial x_1 = 4.

e. $\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x^2}-\mathbf{1}}=\boldsymbol{x^2}$

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2=x^4\Rightarrow 2x^2-1=x^4\Rightarrow -x^4+2x^2-1=0$$

Se hace cambio de variable: $x^2=t\Longrightarrow -t^2+2t-1=0$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{-2}=\frac{2\pm0}{2}=1\Longrightarrow x=\pm1.$$

x_1 = 1; x_2 = –1. Las dos soluciones cumplen la ecuación inicial.

f. $\sqrt{\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}=-\mathbf{3}$

$$\sqrt{4x+5}=-(2x+3)\Rightarrow\left(\sqrt{4x+5}\right)^2=\left[-(2x+3)\right]^2\Rightarrow 4x+5=4x^2+12x+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot4\cdot4}}{2\cdot4}=\frac{-8\pm0}{8}=-1$$

x = –1 no cumple la ecuación inicial, luego no tiene solución.

g. $\mathbf{3}\sqrt{\boldsymbol{x}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}=\mathbf{15}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}$

$$3\sqrt{x}=2x-5+15-3x\Rightarrow 3\sqrt{x}=-x+10\Rightarrow\left(3\sqrt{x}\right)^2=(-x+10)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x=x^2-20x+100\Rightarrow x^2-29x+100=0$$

$$x=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4\cdot1\cdot100}}{2\cdot1}=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{29\pm21}{2}$$

x_1 = 25; x_2 = 4. Solo cumple la ecuación inicial x_2 = 4.

h. $\mathbf{1-\sqrt{8-x}=2x}$

$$1-2x=\sqrt{8-x}\Rightarrow(1-2x)^2=\left(\sqrt{8-x}\right)^2\Rightarrow 1+4x^2-4x=8-x\Rightarrow 4x^2-3x-7=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2+4\cdot4\cdot7}}{2\cdot4}=\frac{3\pm\sqrt{121}}{8}=\frac{3\pm11}{8}$$

$$x_1=\frac{7}{4};x_2=-1$$

Solo cumple la ecuación inicial la solución $x_2 = -1$.

28 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{\sqrt{-x+6}=\sqrt{-x^2+4x}}$

$$\left(\sqrt{-x+6}\right)^2=\left(\sqrt{-x^2+4x}\right)^2\Rightarrow -x+6=-x^2+4x\Rightarrow x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$. Las dos soluciones cumplen la ecuación inicial.

b. $\mathbf{2\sqrt{4x-3}=\sqrt{8x-2}}$

$$\left(2\sqrt{4x-3}\right)^2=\left(\sqrt{8x-2}\right)^2\Rightarrow 4\cdot(4x-3)=8x-2\Rightarrow 16x-12=8x-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-10=0\Rightarrow x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

La solución cumple la ecuación inicial.

c. $\mathbf{\sqrt{x-1}=\sqrt{x+3}+2}$

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2\Rightarrow x-1=x+3+4\sqrt{x+3}+4\Rightarrow 4\sqrt{x+3}+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+3}=-2\Rightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)^2=4\Rightarrow x+3=4\Rightarrow x=1$$

La solución no cumple la ecuación inicial, luego no existe solución.

d. $\mathbf{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x}=-2}$

$$\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x}\right)^2=4\Rightarrow 2x-1+5x-2\left(\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{5x}\right)=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(7x-5)=2\left(\sqrt{5x\cdot(2x-1)}\right)=2\sqrt{10x^2-5x}\Rightarrow(7x-5)^2=4\left(\sqrt{10x^2-5x}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x^2-70x+25=4\cdot\left(10x^2-5x\right)\Rightarrow 49x^2-70x+25=40x^2-20x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2-50x+25=0$$

$$x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\cdot9\cdot25}}{2\cdot9}=\frac{50\pm\sqrt{1600}}{18}=\frac{50\pm40}{18}$$

$x_1 = 5$; $x_2=\frac{5}{9}$. Solo cumple la ecuación inicial la solución $x_1 = 5$.

e. $\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}=\mathbf{7}$

$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=7\Rightarrow\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}\right)^2=49\Rightarrow$

$\Rightarrow x+5+3x+4+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{3x+4}=49\Rightarrow 4x+9+2\sqrt{3x^2+19x+20}=49\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+19x+20}=40-4x\Rightarrow\left(2\sqrt{3x^2+19x+20}\right)^2=(40-4x)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cdot\left(3x^2+19x+20\right)=1600-320x+16x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x^2+76x+80=1600-320x+16x^2\Rightarrow 4x^2-396x+1520=0$

$$x=\frac{396\pm\sqrt{396^2-4\cdot4\cdot1520}}{2}=\frac{396\pm364}{2}$$

$x_1 = 4$; $x_2=\frac{189}{2}$. Solo cumple la ecuación inicial la solución $x_1 = 4$.

f. $\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{8}}-\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7}}=\mathbf{0}$

$\sqrt{x^4+8}=\sqrt{2x^2+7}\Rightarrow\left(\sqrt{x^4+8}\right)^2=\left(\sqrt{2x^2+7}\right)^2\Rightarrow x^4+8=2x^2+7\Rightarrow$

$\Rightarrow x^4-2x^2+1=0$

Se cambia la variable $x^2 = t \Longrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$$t=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{2\pm0}{2}=1$$

$x = \sqrt{t}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. Las dos soluciones cumplen la ecuación inicial.

g. $\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}+\sqrt{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{10}}=\mathbf{0}$

$\sqrt{1-x}=-\sqrt{3x+10}\Rightarrow\left(\sqrt{1-x}\right)^2=\left(-\sqrt{3x+10}\right)^2\Rightarrow 1-x=3x+10\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=-9; x=-\frac{9}{4}$

La solución no cumple la ecuación inicial, luego no existe solución.

h. $\sqrt[3]{\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}-\mathbf{2}$

$\left(\sqrt[3]{5x+2}\right)^3=(x-2)^3\Rightarrow 5x+2=x^3-6x^2+12x-8\Rightarrow$

$\Rightarrow x^3-6x^2+7x-10=0$

Se utiliza la regla de Ruffini para encontrar las raíces del polinomio:

	1	–6	7	–10
5		5	–5	10
	1	–1	2	0

$x = 5$ es una raíz. El polinomio no se puede factorizar más:

$(x - 5) \cdot (x^2 - x + 2) = 0$

El factor de segundo grado no tiene soluciones reales, pues su discriminante es negativo.

Se comprueba que la raíz $x = 5$ cumple con la ecuación inicial, de manera que $x = 5$ es solución de dicha ecuación.

SOLUCIONES PÁG. 78

29 Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa el resultado en forma de intervalo:

a. $\boldsymbol{x - 5 > 9}$

$x > 9 + 5$

$x > 14 \Rightarrow (14\ ,\ +\infty)$

b. $\boldsymbol{5x \leq -3 + 4x}$

$5x - 4x \leq -3$

$x \leq -3 \Rightarrow (-\infty\ ,\ -3]$

c. $\boldsymbol{-2x \leq 7}$

$2x \geq -7$

$x \geq -\frac{7}{2} \Rightarrow \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$

d. $\boldsymbol{6 - x < 1}$

$6 - 1 < x$

$5 < x \Rightarrow (5\ ,\ +\infty)$

e. $\boldsymbol{-2x + 5 \geq -3x - 9}$

$-2x + 3x \geq -9 - 5$

$x \geq -14 \Rightarrow [-14\ ,\ +\infty)$

f. $\boldsymbol{3 \cdot (x + 2) \leq 12}$

$3x + 6 \leq 12$

$3x \leq 12 - 6$

$3x \leq 6$

$x \leq 2 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 2]$

30 Comprueba si los siguientes números son solución de la inecuación:

$$\mathbf{2\cdot(x-4)+7\leq\frac{3x+1}{5}}$$

a. $\boldsymbol{x}$ **= 5**

$2\cdot(5-4)+7=9$

$\frac{3\cdot 5+1}{5}=3{,}2$

$9>3{,}2$

x = 5 no es solución.

b. $\boldsymbol{x}$ **= –1**

$2\cdot(-1-4)+7=-3$

$\frac{3\cdot(-1)+1}{5}=0{,}4$

$-3<0{,}4$

x = –1 sí es solución.

c. $\boldsymbol{x}$ **= 2**

$2\cdot(2-4)+7=5$

$\frac{3\cdot 2+1}{5}=1{,}4$

$5>1{,}4$

x = 2 no es solución.

d. $\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$

$2\cdot\left(\frac{5}{2}-4\right)+7=4$

$\frac{3\cdot\frac{5}{2}+1}{5}=1{,}7$

$4>1{,}7$

$x=\frac{5}{2}$ no es solución.

También se puede resolver la inecuación y ver si las soluciones propuestas pertenecen o no al intervalo solución:

$$2\cdot(x-4)+7\leq\frac{3x+1}{5}\Rightarrow 2x-8+7\leq\frac{3x+1}{5}\Rightarrow 10x-5\leq 3x+1\Rightarrow 7x\leq 6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\leq\frac{6}{7}\Rightarrow\left(-\infty\,,\frac{6}{7}\right]$$

Se comprueba que la única solución que pertenece a este intervalo es la b: *x* = –2.

SOLUCIONES PÁG. 79

31 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $\mathbf{3x + 1 - x - 7 > 5x + 3}$

$1 - 7 - 3 > 5x - 2x$

$-9 > 3x \Rightarrow -3 < x \Rightarrow (-\infty, -3)$

b. $\mathbf{-4 + 6x < 2x - (x + 1)}$

$6x - 2x + x < -1 + 4$

$5x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{5} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

c. $\mathbf{-5 \cdot (2 - 3x) + 4x \geq -7x + 2}$

$-10 + 15x + 4x \geq -7x + 2$

$15x + 4x + 7x \geq 10 + 2$

$26x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{26} = \frac{6}{13} \Rightarrow \left[\frac{6}{13}, +\infty\right)$

d. $\mathbf{-x + 2 \cdot (7 - 3x) - (x + 4) \leq 11 - 5 \cdot (x + 2)}$

$-x + 14 - 6x - x - 4 \leq 11 - 5x - 10$

$-11 + 10 + 14 - 4 \leq x + 6x + x - 5x$

$9 \leq 3x \Rightarrow 3 \leq x \Rightarrow [3, +\infty)$

e. $\mathbf{4 \cdot [2 \cdot (x - 3) - 5x] < -6 \cdot (x - 2)}$

$4 \cdot [2x - 6 - 5x] < -6x + 12$

$8x - 24 - 20x < -6x + 12$

$-24 - 12 < -6x + 20x - 8x$

$-6 < 6x \Rightarrow -6 < x \Rightarrow (-6, +\infty)$

32 Resuelve estas inecuaciones:

a. $\mathbf{\frac{7x}{3} - 4 \leq \frac{5x}{6} + 1}$

$\frac{7x - 12}{3} \leq \frac{5x + 6}{6} \Rightarrow 14x - 24 \leq 5x + 6 \Rightarrow 9x \leq 30 \Rightarrow x \leq \frac{30}{9} = \frac{10}{3} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$

b. $\mathbf{\frac{-x + 6}{12} \leq \frac{3x - 1}{8} + \frac{x}{6}}$

$\frac{-2x + 12}{24} \leq \frac{9x - 3 + 4x}{24} \Rightarrow -2x + 12 \leq 9x - 3 + 4x \Rightarrow 15 \leq 15x \Rightarrow 1 \leq x \Rightarrow [1, +\infty)$

c. $\mathbf{\frac{11x}{9}-\frac{2\cdot(x-5)}{4}+\frac{x+1}{6}>0}$

$\frac{44x}{36}-\frac{9\cdot 2\cdot(x-5)}{36}+\frac{6\cdot\left(x+1\right)}{36}>0\Rightarrow 44x-18x+90+6x+6>0$

$32x>-96\Rightarrow x>-3\Rightarrow\left(-3\ ,+\infty\right)$

SOLUCIONES PÁG. 80

33 Comprueba, sin resolver la inecuación, si los pares (–4 , –1); (–1 , 2); (0 , 0) y (6 , 1) son su solución:

$$\mathbf{\frac{5y+1}{2}>3\cdot(x-4)}$$

Se sustituyen los pares en la ecuación y se comprueba si la cumple o no:

- (–4 , –1); x = –4; y = –1

  $\frac{5\cdot(-1)+1}{2}>3\cdot(-4-4);$

  $2>-24$

  Sí, el par (–4 , –1) es solución.

- (–1 , 2); x = –1; y = 2

  $\frac{5\cdot 2+1}{2}>3\cdot(-1-4);$

  $\frac{11}{2}>-15$

  Sí, el par (–1 , 2) es solución.

- (0 , 0) ; x = 0; y = 0

  $\frac{5\cdot 0+1}{2}>3\cdot(0-4);$

  $\frac{1}{2}>-12$

  Sí, el par (0 , 0) es solución.

- (6 , 1); x = 6; y = 1

  $\frac{5\cdot 1+1}{2}>3\cdot(6-4);$

  3 6

  No, el par (6 , 1) no es solución.

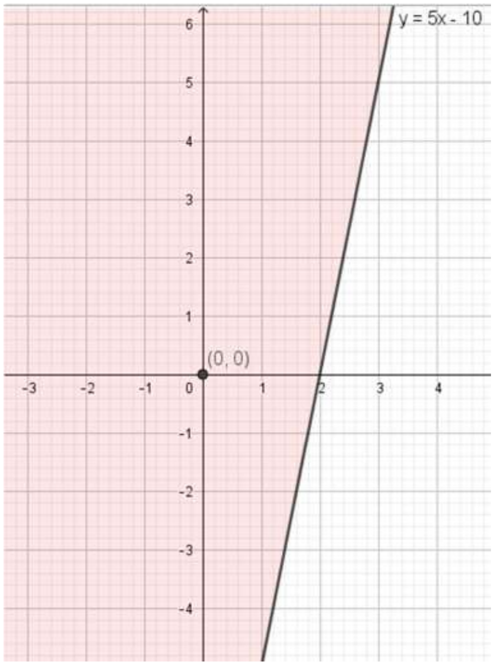
34 Resuelve estas inecuaciones:

a. $\mathbf{5x - y \leq 10}$

$y \leq 5x - 10$

- Se representa la recta $y = 5x - 10$, que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

  $5 \cdot 0 - 0 \leq 10 \Longrightarrow 0 \leq 10$. El punto (0 , 0) pertenece al plano solución.



b. $\mathbf{7 - 2 \cdot (4x - 3) < -5y}$

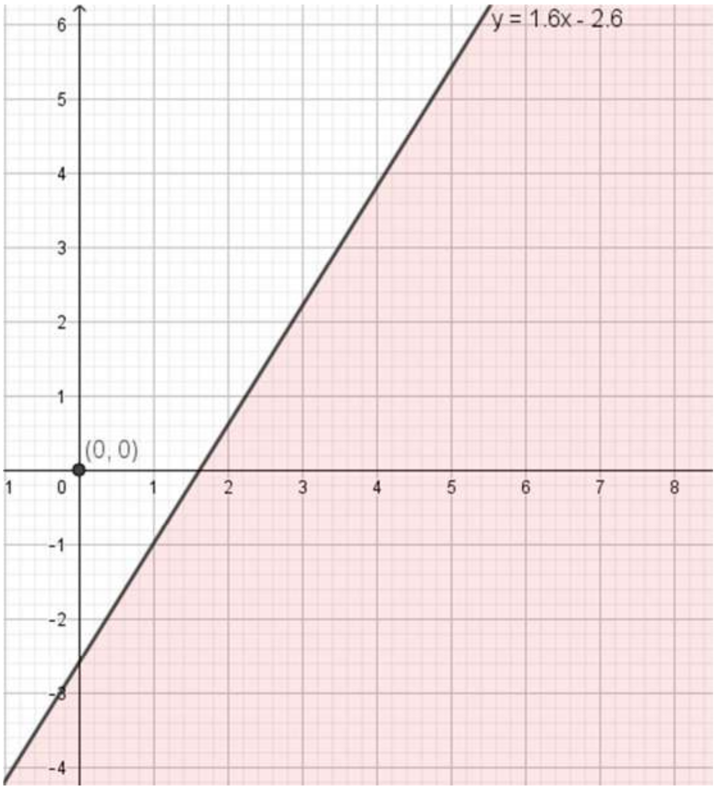
$5y - 8x < -13$

$$y < \frac{8x - 13}{5}$$

- Se representa la recta $y = \frac{8x - 13}{5}$, que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

  $7 - 8 \cdot 0 + 6 < -5 \cdot 0$

  $1 \quad 0 \Longrightarrow$ El punto (0 , 0) no pertenece al plano solución.



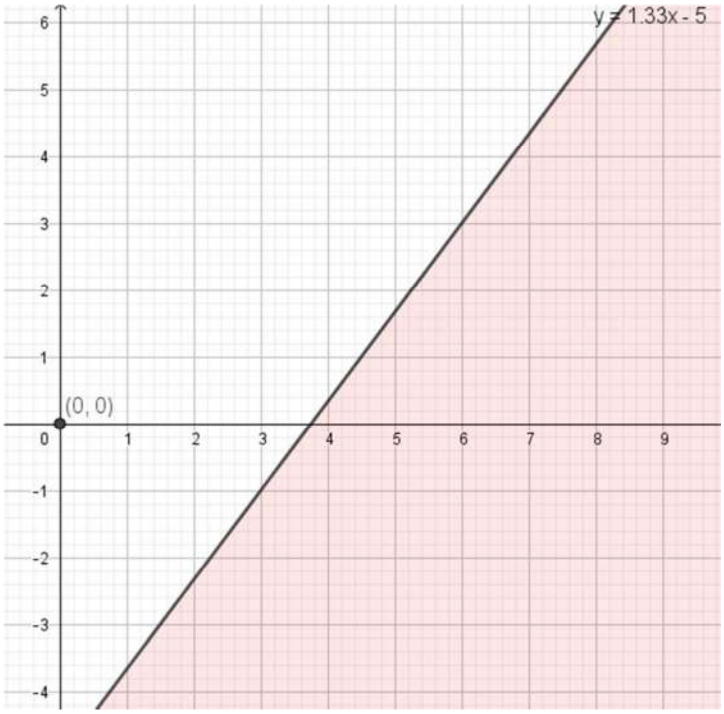
c. $4x > 3y + 15$

$4x - 15 > 3y$

$y < \frac{4x - 15}{3}$

- Se representa la recta $y = \frac{4x - 15}{3}$, que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

  $4 \cdot 0 > 3 \cdot 0 + 15$; $0 \quad 15 \Rightarrow$ El punto (0 , 0) no pertenece al plano solución.



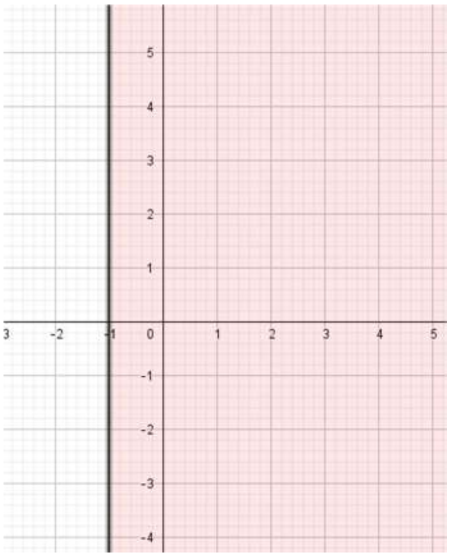
d. $\mathbf{4 \cdot (x - y) \geq 3x - 4y - 1}$

$4x - 4y \geq 3x - 4y - 1$

$4x - 3x - 4y + 4y \geq -1$

$x \geq -1$

- Se representa la recta $x = -1$, que divide al plano en dos semiplanos y se toma el semiplano que cumple la condición $x \geq -1$



e. $3 \cdot (x + 1) - y > 5x + 6$

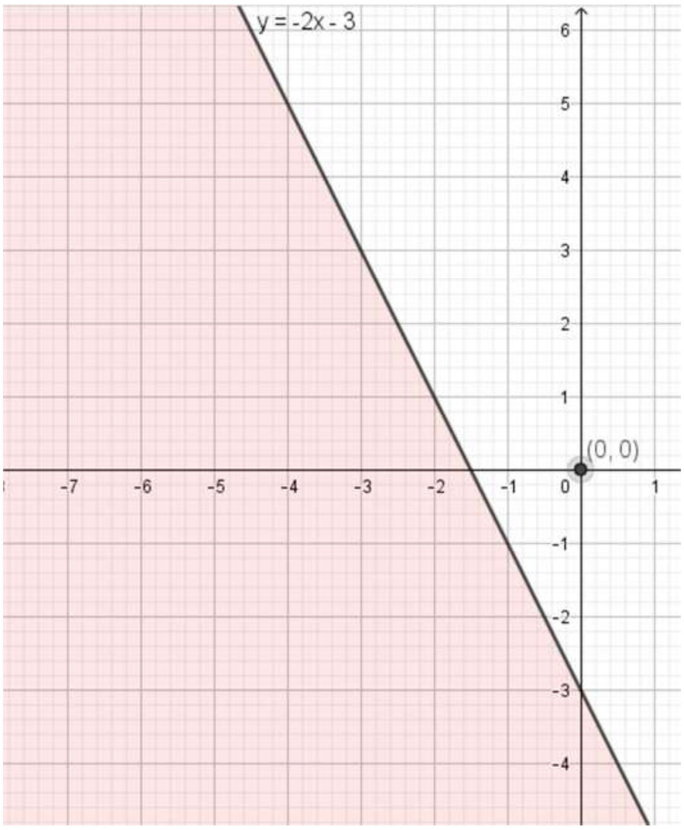
$3 \cdot (x + 1) - y > 5x + 6$

$3x + 3 - y > 5x + 6$

$y < -2x - 3$

- Se representa la recta $y = -2x - 3$, que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

  $3 \cdot (0 + 1) - 0 > 5 \cdot 0 + 6$; 3   6 $\Rightarrow$ El punto (0 , 0) no pertenece al plano solución.



f. $-7 \cdot (x + 1) \leq 10 \cdot (y + 1)$

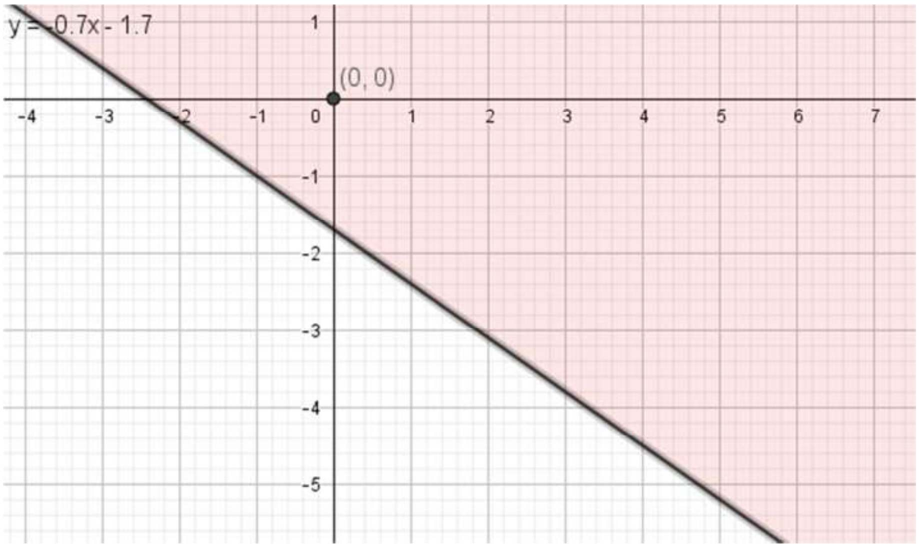
$-7x - 7 \leq 10y + 10$

$-7x - 17 \leq 10y$

$y \geq \dfrac{-7x - 17}{10}$

- Se representa la recta $y = \dfrac{-7x - 17}{10}$, que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$-7 \cdot (0 + 1) \leq 10 \cdot (0 + 1)$; $-7 \leq 10 \Longrightarrow$ El punto (0 , 0) pertenece al plano solución.



SOLUCIONES PÁG. 81

35 Resuelve estas inecuaciones:

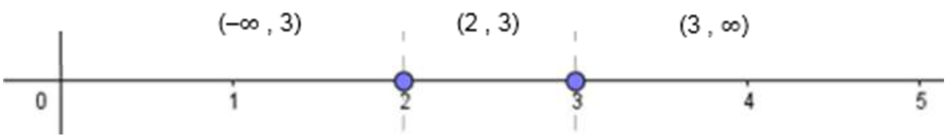
a. $x^2 - 5x + 6 < 0$

Se factoriza el polinomio:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 3$; $x_2 = 2 \Longrightarrow (x - 3) \cdot (x - 2) < 0$

Se representan las raíces obtenidas en una recta numérica y se divide la misma en los intervalos que marcan esas raíces:



Se toma un valor cualquiera de cada intervalo y se comprueba el signo de la inecuación en ese intervalo:

- En $(-\infty , 3)$ se comprueba, por ejemplo, con el punto $x = 1$:
  $(1 - 3) \cdot (1 - 2) = (-2) \cdot (-1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ la ecuación factorizada es positiva en este intervalo.

- En (2 , 3) se comprueba, por ejemplo, con el punto $x = \frac{5}{2}$:

  $\left(\frac{5}{2} - 3\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - 2\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ la ecuación factorizada es negativa en este intervalo.

- En (3 , ∞) se comprueba, por ejemplo, con el punto $x = 4$:
  $(4 - 3) \cdot (4 - 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \Rightarrow$ la ecuación factorizada es positiva en este intervalo.

Como la inecuación es $(x - 3) \cdot (x - 2) < 0$ las soluciones válidas son las del intervalo (2 , 3), que es el que produce números negativos.

b. $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 9x - 18 > 0}$

Se factoriza el polinomio:

	1	2	–9	–18
3		3	15	18
	1	5	6	0

(x – 3) es un factor.

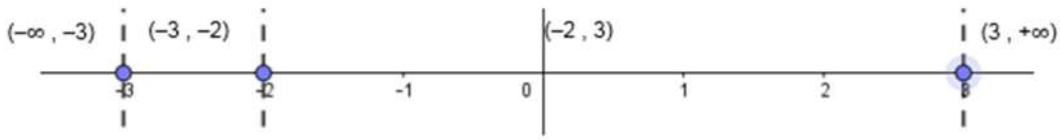
	1	5	6
–2		–2	–6
	1	3	0

(x + 2) es un factor y (x + 3) otro factor.

La inecuación factorizada queda así:

$(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) > 0$

Se representan las raíces obtenidas en una recta numérica y se divide la misma en los intervalos que marcan esas raíces:



Se toma un valor cualquiera de cada intervalo y se comprueba el signo de la inecuación en ese intervalo:

- En (–∞ , –3) la ecuación factorizada es < 0.
- En (–3 , –2) la ecuación factorizada es > 0.
- En (–2 , 3) la ecuación factorizada es < 0.
- En (3 , +∞) la ecuación factorizada es > 0.

Como la inecuación es $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) > 0$, las soluciones válidas son las del intervalo $(-3 , -2) \cup (3 , +\infty)$, que son los que producen números positivos.

36 Resuelve estas inecuaciones:

a. $-4x^2 + x - 3 \geq 0$

Se buscan las raíces del polinomio:

$-4x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{-2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{8}$$

No tiene raíces reales, lo que significa que no hay ningún intervalo que pueda cumplir la inecuación.

b. $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$

Se buscan las raíces del polinomio haciendo un cambio de variable: $x^2 = t$.

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

- $t_1 = 1$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

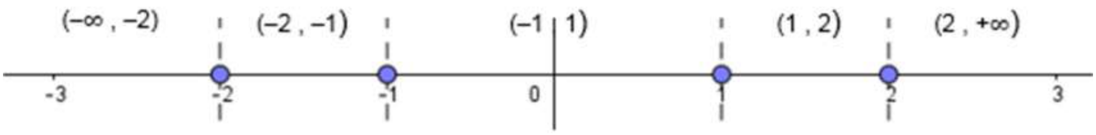
- $t_2 = 4$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = 2$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -2$

La inecuación factorizada queda así:

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \leq 0$



Se toma un valor cualquiera de cada intervalo y se comprueba el signo de la inecuación en ese intervalo:

- En (–∞ , –2) la ecuación factorizada es > 0.
- En (–2 , –1) la ecuación factorizada es < 0.
- En (–1 , 1) la ecuación factorizada es > 0.
- En (1 , 2) la ecuación factorizada es < 0.
- En (2 , +∞) la ecuación factorizada es > 0.

Como la inecuación es $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \leq 0$, las soluciones válidas son las del intervalo $[-2 , -1] \cup [1 , 2]$, que son las que producen números menores o iguales que cero.

SOLUCIONES PÁG. 85

37 Un agricultor tiene 4 días para arar su terreno. El primer día labra la tercera parte del terreno y el resto de días la mitad del terreno que trabajó el día anterior. Si tras el cuarto día le faltan aún 18 m^2 por arar, ¿cuántos metros cuadrados tiene el terreno?

Se identifica como x el área del terreno.

El primer día el agricultor ara $\frac{1}{3}x$

El segundo día ara $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{6}x$

El tercer día ara $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}x\right)=\frac{1}{12}x$

El cuarto día ara $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}x\right)=\frac{1}{24}x$

Después de 4 días de trabajo faltan 18 m^2 por arar, eso significa que la suma del terreno arado durante esos días más lo que falta es el área total del terreno:

$$x=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{24}x+18$$
$$x\cdot(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24})=18$$
$$\frac{3}{8}x=18\Rightarrow x=48$$

El terreno tiene 48 m^2.

38 El área de un trapecio de 6 cm de altura es de 69 cm^2. Si las bases se diferencian en 7 cm, ¿cuánto miden las dos bases?

Se establece el área del trapecio: $A=\frac{B+b}{2}\cdot h$

Se asigna la incógnita x a la longitud de la base mayor, B:

$B = x$

$B - b = 7 \Rightarrow b = x - 7$

Se sustituyen los valores del área y la altura y la relación entre las bases en la expresión del área:

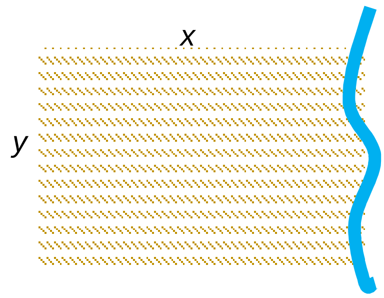
$$A=\frac{x+(x-7)}{2}\cdot h=69\Rightarrow\frac{x+(x-7)}{2}\cdot 6=69\Rightarrow\frac{2x-7}{2}\cdot 6=69\Rightarrow 2x-7=23\Rightarrow x=15$$

La base mayor, B, mide 15 cm

La base menor, b = 15 – 7 = 8 cm

39 Se desea vallar un terreno rectangular con 1 200 m de cerca. Por uno de los lados del terreno discurre un río, por lo que no es necesario vallarlo. Si el área del terreno es de 160 000 m², ¿cuáles son sus dimensiones?

Se establece la ecuación del perímetro a vallar y del área del terreno:



$P = 2x + y = 1\,200$

$A = x \cdot y = 160\,000$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$y = 1\,200 - 2x$

$x \cdot (1\,200 - 2x) = 160\,000$

$-2x^2 + 1\,200x - 160\,000 = 0$

$-x^2 + 600x - 80\,000 = 0;$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-600 \pm \sqrt{600^2 - 4 \cdot 80000}}{-2} = \frac{-600 \pm \sqrt{40000}}{-2} = \frac{600 \pm 200}{2}$$

$x_1 = 400 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 1200 - 800 = 400 \text{ m}$

$x_2 = 200 \text{ m} \Rightarrow y_2 = 1200 - 400 = 800 \text{ m}$

Hay, por tanto, dos soluciones:
400 × 400 m
200 × 800 m

40 La tercera parte del cuadrado de un número menos la cuarta parte del cuadrado de su consecutivo es mayor que $\frac{13}{12}$. ¿Qué valores puede tener ese número?

Se plantea la inecuación:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 > \frac{13}{12}$$

Se intenta factorizar la inecuación, resolviendo la ecuación:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 = \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{4x^2 - 3 \cdot (x+1)^2}{12} = \frac{13}{12} \Rightarrow 4x^2 - 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 13$$

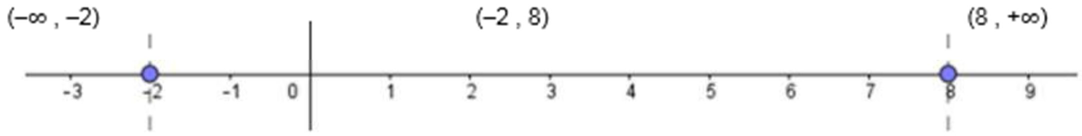
$$4x^2 - 3x^2 - 6x - 3 = 13 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}$$

$x_1 = 8;\ x_2 = -2$

Es decir, la inecuación en factores es: $(x - 8) \cdot (x + 2) > 0$.

Se representan en la recta numérica los intervalos que pueden cumplir la inecuación y se comprueba cuál de ellos es solución:



Se toma un valor cualquiera de cada intervalo y se comprueba el signo de la inecuación en ese intervalo:

- En $(-\infty , -2)$ la ecuación factorizada es > 0.
- En $(-2 , 8)$ la ecuación factorizada es < 0.
- En $(8 , +\infty)$ la ecuación factorizada es > 0.

Cualquier valor que pertenezca a $(-\infty, -2) \cup (8 , +\infty)$ es solución de la inecuación.

41 La raíz cuadrada del triple de un número, aumentada en 6 unidades, es igual al cuádruple del número disminuido en 9 unidades. ¿Cuál es ese número?

Se establece la incógnita, x y la ecuación que cumple:

$$\sqrt{3x} + 6 = 4 \cdot (x - 9)$$

Se resuelve la ecuación irracional:

$$\sqrt{3x} + 6 = 4 \cdot (x - 9)$$

$$\sqrt{3x} + 6 = 4x - 36$$

$$\sqrt{3x} = 4x - 42$$

$$\left(\sqrt{3x}\right)^2 = (4x - 42)^2$$

$$3x = 16x^2 - 336x + 1764$$

$$16x^2 - 339x + 1764 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{339 \pm \sqrt{339^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1764}}{2 \cdot 16} = \frac{339 \pm \sqrt{2025}}{32}$$

$$x = \frac{339 \pm 45}{32}$$

$x_1 = 12$; $x_2 = \frac{147}{16}$. Solo cumple la ecuación inicial la solución $x_1 = 12$.

El número es 12.

42 La suma de las edades de 3 hermanos es menor que 53. Si el mediano es 5 años mayor que el pequeño, y el mayor tiene el doble de años que el pequeño, ¿qué edad puede tener el hermano menor?

Se plantea la incógnita, la edad del hermano menor, x.

Se establece la relación de la incógnita con los datos que ofrece el problema:

Edad del hermano menor: x

Edad del hermano mediano: $x + 5$

Edad del hermano mayor: $2x$

La suma de las edades de los hermanos es:

$x + (x + 5) + 2x < 53$

$4x + 5 < 53$

$4x < 48 \Longrightarrow x < 12$

El hermano menor tiene menos de 12 años.

43 Una empresa de alquiler de vehículos cobra, por una furgoneta, 50 € fijos más 5 € por cada hora de alquiler y, si es un turismo, 90 € más 3 € por hora. ¿A partir de cuántas horas de alquiler sale más económico decidirse por una furgoneta?

Se plantea la incógnita, x, que es el número de horas de alquiler.

Se establece la relación de la incógnita con los datos del problema:

- El alquiler de la furgoneta cuesta: $50 + 5x$
- El alquiler del turismo cuesta: $90 + 3x$
- La furgoneta sale más económica si su precio es menor que el del turismo, es decir:

  $50 + 5x < 90 + 3x$

  $2x < 40 \Longrightarrow x < 20$ horas

Es más económico alquilar la furgoneta si se alquila menos de 20 horas.

44 Una perfumería dispone de dos tipos de perfume: uno a 5 €/L y otro a 7 €/L. Con ambas variedades quiere hacer una mezcla de 70 L que no cueste más de 6 €/L. ¿Qué cantidad de litros de cada tipo podrá mezclar?

Se denomina x a los litros del perfume de 5€/L e y al perfume de 7€/L.

Se establece la relación entre incógnitas y datos del problema:

La cantidad de la mezcla de perfumes es: $x + y = 70$

El precio de la mezcla de perfumes, para la cantidad que se quiere producir es:

$x \cdot 5 + y \cdot 7 < 6 \cdot 70 \Longrightarrow 5x + 7y < 420$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 5x + 7y < 420 \end{cases}$$

$x = 70 - y$

$5 \cdot (70 - y) + 7y < 420$

$350 - 5y + 7y < 420$

$2y = 70 \Rightarrow y < 35$ L; $x < 35$ L

La cantidad de perfume del primero debe ser menor o igual a 35 L.

SOLUCIONES PÁG. 87

1 ¿Cuántas soluciones reales puede tener una ecuación de segundo grado completa? ¿De qué depende el número de soluciones?

Puede tener dos soluciones reales distintas, una solución real doble o no tener solución. El número de soluciones depende del valor del discriminante.

El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c$, es $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

2 Explica cuál es el procedimiento seguido para resolver una ecuación bicuadrada.

Respuesta abierta.

3 ¿Puede carecer de solución una ecuación bicuadrada? Justifica tu respuesta mediante un ejemplo.

Sí ver actividad 23 de la página 73. Respuesta abierta.

4 ¿En qué tipo de ecuación es necesario comprobar las soluciones, dado que pueden obtenerse valores que no cumplen la ecuación?

En las ecuaciones con fracciones algebraicas y en las irracionales.

5 ¿Cuántas soluciones reales puede tener como máximo una ecuación polinómica de grado *n*?

Puede tener n soluciones como máximo.

6 Al resolver una inecuación de primer grado con dos incógnitas, a*x* + b*y* < c, se representa gráficamente la recta a*x* + b*y* = c, que divide al plano en dos semiplanos. ¿Cómo podemos averiguar cuál de los dos semiplanos es la solución de la inecuación?

Se elige un punto de uno de los dos semiplanos y se sustituye en la desigualdad. Si la desigualdad es cierta, la solución es ese semiplano; si no, es el otro semiplano.

7 Explica el procedimiento utilizado para resolver una inecuación de segundo grado con una incógnita.

Respuesta abierta.

8 ¿Cuántas soluciones reales puede tener una ecuación de primer grado con una incógnita? ¿Y una inecuación de primer grado con una incógnita?

Una ecuación de primer grado con una incógnita puede tener una solución, infinitas soluciones (todos los números reales) o no tener solución.

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede tener como solución un intervalo, todos los números reales o no tener solución.

9 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 88 - REPASO FINAL

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{-4x + 5 - x = 8x + 3 - 11}$

$5 - 3 + 11 = 8x + 4x + x$

$13 = 13x \Rightarrow x = 1$

b. $\boldsymbol{x - 2 + 6x + 5 = 3x - 1 + 4x}$

$x + 6x - 3x - 4x = -1 + 2 - 5$

$0 \neq -4 \Rightarrow$ No tiene solución.

c. $\mathbf{3 - 2\textit{x} + 7 = \textit{x} - 2 - 9\textit{x} + 4}$

$9x - 2x - x = -2 + 4 - 3 - 7$

$6x = -8 \Longrightarrow x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

d. $\mathbf{-\textit{x} - 4\textit{x} + 6 = -1 - 3\textit{x} + 13 + \textit{x}}$

$-x - 4x + 3x - x = -1 + 13 - 6$

$-3x = 6 \Longrightarrow x = -2$

e. $\mathbf{-1 + 6\textit{x} - 4 + \textit{x} = 2\textit{x} + 5 - 10 + 5\textit{x}}$

$6x + x - 5x - 2x = 5 - 10 + 1 + 4$

$0x = 0 \Longrightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

f. $\mathbf{8\textit{x} - 4 + 5\textit{x} = 1 + 2\textit{x} - \textit{x}}$

$8x + 5x - 2x + x = 1 + 4$

$12x = 5 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}$

2 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{3 - (\textit{x} + 4) + 5\textit{x} = 8 + (1 - 6\textit{x})}$

$3 - x - 4 + 5x = 8 + 1 - 6x$

$-x + 5x + 6x = 8 + 1 - 3 + 4$

$10x = 10 \Longrightarrow x = 1$

b. $\mathbf{5 \cdot (3\textit{x} + 2) - 7\textit{x} = 2\textit{x} - 4}$

$15x + 10 - 7x = 2x - 4$

$15x - 7x - 2x = -4 - 10$

$6x = -14 \Longrightarrow x = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$

c. $\mathbf{-3 \cdot (-\textit{x} - 5) - 2\textit{x} - 6 = 4 \cdot (3 + \textit{x})}$

$3x + 15 - 2x - 6 = 12 + 4x$

$3x - 2x - 4x = 12 - 15 + 6$

$-3x = 3 \Longrightarrow x = -1$

d. $\mathbf{-(2 - 4\textit{x}) + 5 \cdot (\textit{x} + 1) = 6 \cdot (2\textit{x} + 3)}$

$-2 + 4x + 5x + 5 = 12x + 18$

$4x + 5x - 12x = 18 - 5 + 2$

$-3x = 15 \Longrightarrow x = -5$

e. $-4 \cdot (x + 3) + 2 \cdot (x - 1) = 5 - 2 \cdot (x - 4)$

$-4x - 12 + 2x - 2 = 5 - 2x + 8$

$-4x + 2x + 2x = 5 + 8 + 12 + 2$

$0 \neq 27 \Longrightarrow$ No tiene solución.

f. $2 + 7 \cdot (1 - 2x) = 3 - 6 \cdot (3x + 2)$

$2 + 7 - 14x = 3 - 18x - 12$

$18x - 14x = 3 - 12 - 2 - 7$

$4x = -18 \Longrightarrow x = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

3 Resuelve estas ecuaciones:

a. $\mathbf{\frac{3x}{5} + \frac{1}{6} = 2 - \frac{x}{10}}$

$\frac{18x + 5}{30} = \frac{60 - 3x}{30}$

$18x + 5 = 60 - 3x$

$21x = 55 \Rightarrow x = \frac{55}{21}$

b. $\mathbf{4x - \frac{5}{8} = -3 + \frac{7x}{4}}$

$\frac{32x - 5}{8} = \frac{-24 + 14x}{8}$

$32x - 5 = -24 + 14x$

$18x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{18}$

c. $\mathbf{\frac{x}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 14}$

$\frac{6x - 9x + 10x}{12} = \frac{168}{12}$

$6x - 9x + 10x = 168$

$7x = 168 \Rightarrow x = 24$

d. $\mathbf{\frac{3x - 5}{9} = \frac{4x - 7}{12}}$

$\frac{12x - 20}{36} = \frac{12x - 21}{36}$

$12x - 20 = 12x - 21$

$0 \neq -1$

No tiene solución.

e. $\mathbf{-5x+2=\frac{-3x-9}{4}}$

$-20x+8=-3x-9$

$-17x=-17 \Rightarrow x=1$

f. $\mathbf{\frac{x+3}{8}-\frac{1-2x}{6}=\frac{5x}{12}}$

$\frac{3x+9-4+8x}{24}=\frac{10x}{24}$

$3x+9-4+8x=10x$

$x=-5$

g. $\mathbf{-1+\frac{x+4}{3}=\frac{5x+2}{6}-\frac{1}{4}}$

$\frac{-12+4x+16}{12}=\frac{10x+4-3}{12}$

$-12+4x+16=10x+4-3$

$6x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

h. $\mathbf{\frac{2x+1}{7}+\frac{x-2}{4}=\frac{3x-5}{14}}$

$\frac{8x+4+7x-14}{28}=\frac{6x-10}{28}$

$8x+4+7x-14=6x-10$

$9x=0 \Rightarrow x=0$

4 Calcula las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{5-\frac{2\cdot(1-x)}{3}=\frac{2\cdot(x-1)}{4}}$

$\frac{60-8+8x}{12}=\frac{6x-6}{12}$

$60-8+8x=6x-6$

$2x=-58 \Rightarrow x=-29$

b. $\mathbf{\frac{3\cdot(2x+1)}{5}-x=\frac{3x-1}{4}+\frac{7-x}{2}}$

$\frac{6x+3-5x}{5}=\frac{3x-1}{4}+\frac{7-x}{2}$

$\frac{24x+12-20x}{20}=\frac{15x-5+70-10x}{20}$

$24x+12-20x=15x-5+70-10x$

$x=-53$

c. $\mathbf{3x + \frac{2 \cdot (x-4)}{9} = \frac{5 \cdot (1-2x)}{6} + \frac{3x}{2}}$

$$\frac{27x + 2x - 8}{9} = \frac{5 - 10x + 9x}{6}$$

$$\frac{29x - 8}{9} = \frac{5 - x}{6}$$

$$\frac{116x - 32}{36} = \frac{30 - 6x}{36}$$

$$116x - 32 = 30 - 6x$$

$$122x = 62 \Rightarrow x = \frac{62}{122} = \frac{31}{61}$$

d. $\mathbf{\frac{5 \cdot (x-2)}{8} - \frac{4 \cdot (2x+3)}{3} = -2 - \frac{2x-1}{6}}$

$$\frac{5x - 10}{8} - \frac{8x + 12}{3} = -2 + \frac{-2x + 1}{6}$$

$$\frac{15x - 30 - 64x - 96}{24} = \frac{-48 - 8x + 4}{24}$$

$$15x - 30 - 64x - 96 = -44 - 8x$$

$$-41x = 82 \Rightarrow x = -2$$

e. $\mathbf{\frac{-(x+2)}{10} + \frac{3x-7}{5} = \frac{3 \cdot (x-2)}{4} + \frac{x}{15}}$

$$\frac{-x - 2}{10} + \frac{3x - 7}{5} = \frac{3x - 6}{4} + \frac{x}{15}$$

$$\frac{-6x - 12 + 36x - 84}{60} = \frac{45x - 90 + 4x}{60}$$

$$-6x - 12 + 36x - 84 = 45x - 90 + 4x$$

$$19x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{19}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

5 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{3x^2 - 12 = 0}$

$3x^2 = 12 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$

b. $\mathbf{-5x^2 + 6x = 0}$

$x \cdot (-5x + 6) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$

$-5x + 6 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{6}{5}$

c. $\mathbf{-3x^2 + 6 = 0}$

$3x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$

d. $\mathbf{18x^2 = 2}$

$x^2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3};$

$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -\frac{1}{3}$

e. $\mathbf{2x \cdot (x + 1) = 2 \cdot (x - 5)}$

$2x^2 + 2x = 2x - 10$

$2x^2 = -10 \Rightarrow x = \sqrt{-5} \Rightarrow$ No tiene solución real.

f. $\mathbf{-3 \cdot (x + 2)^2 = -2 \cdot (x + 6)}$

$-3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = -2x - 12$

$-3x^2 - 12x - 12 = -2x - 12$

$-3x^2 - 10x = 0$

$x \cdot (-3x - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-3x - 10 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{3}$

6 Resuelve estas ecuaciones:

a. $\mathbf{x^2 - 4x - 5 = 0}$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$x_1 = 5$; $x_2 = -1$

b. $\mathbf{-x^2 + 7x - 12 = 0}$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{-2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 4$; $x_2 = 3$

c. $\mathbf{x^2 + 10x + 25 = 0}$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2} = \frac{-10 \pm 0}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

d. $\mathbf{3x^2 - 4x + 8 = 0}$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-80}}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

e. $\mathbf{-2x^2 + x + 6 = 0}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{-2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

f. $\mathbf{6x^2 - 5x + 1 = 0}$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3}$

g. $\mathbf{9x^2 - 30x + 25 = 0}$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25}}{2 \cdot 9} = \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}$$

h. $\mathbf{-2x^2 + x - 3 = 0}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{-2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{-4} \Rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

7 Calcula las siguientes ecuaciones e indica cuáles son de primer o segundo grado:

a. $\mathbf{5 \cdot (x + 3)^2 - 4 \cdot (x + 2)^2 + 11 = 0}$

$5 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 4 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 11 = 0$

$5x^2 + 30x + 45 - 4x^2 - 16x - 16 + 11 = 0$

$x^2 + 14x + 40 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-14 \pm 6}{2}$$

$x_1 = -4$, $x_2 = -10$. Ecuación de 2.º grado.

b. $\mathbf{(x + 1)^2 + 12 = (x - 1)^2}$

$x^2 + 2x + 1 + 12 = x^2 - 2x + 1$

$4x = 12 \Rightarrow x = -3$. Ecuación de 1.er grado.

c. $\mathbf{9 \cdot (x + 3)^2 - 6x^2 = 3x^2 - 5 \cdot (2x - 1)}$

$9 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 6x^2 = 3x^2 - 10x + 5$

$9x^2 + 54x + 81 - 6x^2 = 3x^2 - 10x + 5$

$64x = -76 \Rightarrow x = -\frac{76}{64} = -\frac{19}{16}$

Ecuación de 1.er grado.

d. $\boldsymbol{x \cdot (3x + 2) - 5x \cdot (-4 - 7x) = (x + 3) \cdot (x - 3)}$

$3x^2 + 2x + 20x + 35x^2 = x^2 - 9$

$37x^2 + 22x + 9 = 0$

$x = \dfrac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 37 \cdot 9}}{2 \cdot 37} = \dfrac{-22 \pm \sqrt{-848}}{74}$ $\Rightarrow$No tiene solución real.

Ecuación de 2.º grado.

8 Encuentra las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\boldsymbol{\dfrac{7x+1}{6} = \dfrac{x^2+5}{2} + \dfrac{(2x+5)\cdot(3x-1)}{3}}$

$\dfrac{7x+1}{6} = \dfrac{3x^2+15}{6} + \dfrac{2\cdot(2x+5)\cdot(3x-1)}{6} \Rightarrow 7x+1 = 3x^2+15+12x^2+26x-10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x^2 + 19x + 4 = 0$

$x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4\cdot 15\cdot 4}}{2\cdot 15} = \dfrac{-19 \pm \sqrt{121}}{30} = \dfrac{-19 \pm 11}{30}$

$x_1 = -\dfrac{4}{15}; x_2 = -1$

b. $\boldsymbol{3 \cdot \left(\dfrac{x-2}{5}\right)^2 + x = \dfrac{2x-1}{3}}$

$3 \cdot \dfrac{x^2-4x+4}{25} + x = \dfrac{2x-1}{3} \Rightarrow \dfrac{3x^2-12x+12}{25} + x = \dfrac{2x-1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{9x^2-36x+36+75x}{75} = \dfrac{50x-25}{75} \Rightarrow 9x^2-36x+36+75x = 50x-25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 - 11x + 61 = 0$

$x = \dfrac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot 9\cdot 61}}{2\cdot 18} = \dfrac{11 \pm \sqrt{-2075}}{2\cdot 18}$

No tiene solución real

c. $\boldsymbol{\dfrac{-4x^2-x}{5} - \dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{7x}{3} + 2}$

$\dfrac{-24x^2-6x-10x-5}{30} = \dfrac{70x+60}{30} \Rightarrow -24x^2-6x-10x-5 = 70x+60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24x^2 + 86x + 65 = 0$

$x = \dfrac{-86 \pm \sqrt{86^2 - 4\cdot 24\cdot 65}}{2\cdot 24} = \dfrac{-86 \pm \sqrt{1156}}{48}$

$x = \dfrac{-86 \pm 34}{48}$

$x_1 = -\dfrac{13}{12}; x_2 = -\dfrac{5}{2}$

d. $\mathbf{\frac{(x+1)^2}{10} = \frac{4\cdot(x-1)^2+2x}{5}}$

$$\frac{x^2+2x+1}{10} = \frac{4\cdot(x^2-2x+1)+2x}{5} \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{10} = \frac{4x^2-8x+4+2x}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{10} = 2\cdot\frac{4x^2-6x+4}{10} \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{10} = \frac{8x^2-12x+8}{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1 = 8x^2-12x+8 \Rightarrow 7x^2-14x+7=0$$
$$x = \frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot7\cdot7}}{2\cdot7} = x = \frac{14}{14} = 1$$

e. $\mathbf{\frac{x^2-7}{3} - \frac{x-3}{2} - \frac{5\cdot(x+1)}{6} = 0}$

$$\frac{2x^2-14-3x+9-5x-5}{6} = 0 \Rightarrow 2x^2-8x-10=0$$
$$x = \frac{8\pm\sqrt{8^2+4\cdot2\cdot10}}{2\cdot2} = \frac{8\pm\sqrt{144}}{4}$$
$$x = \frac{8\pm12}{4}$$

$x_1 = 5$; $x_2 = –1$

9 Determina una ecuación de segundo grado cuyas soluciones tengan como suma y producto:

La suma, S, de las soluciones de la ecuación, $x_1 + x_2$, es igual a $\frac{–b}{a}$.

El producto, P, de las soluciones de la ecuación, $x_1 + x_2$, es igual a $\frac{c}{a}$.

Se deben plantear este par de ecuaciones para hallar los coeficientes de cada ecuación:

$$x_1 + x_2 = \frac{–b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

a. S = –3, P = –10

$$x_1 + x_2 = \frac{–b}{a} = 3 \Rightarrow b = –3a$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = –10 \Rightarrow c = –10a$$

Si a = 1 ⟹ b = 3; c = –10 ⟹ $x^2 + 3x – 10 = 0$

b. S = 11, P = 24

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 11 \Rightarrow b = -11a$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 24 \Rightarrow c = 24a$$

Si a = 1 ⟹ b = –11; c = 24 ⟹ $x^2 - 11x + 24 = 0$

c. S = –9, P = 20

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -9 \Rightarrow b = 9a$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 20 \Rightarrow c = 20a$$

Si a = 1 ⟹ b = 9; c = 20 ⟹ $x^2 + 9x + 20 = 0$

10 Halla una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean –3 y 5 y que cumplan estas condiciones:

a. El coeficiente de x^2 es 1.

Si las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$, la ecuación factorizada es:

$(x + 3) \cdot (x - 5) = 0$

$x^2 + 3x - 5x - 15 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, que cumple que el coeficiente de x^2 es 1; si no lo cumpliese, habría que reducir los coeficientes de la ecuación.

b. El coeficiente de x^2 es 2.

La ecuación factorizada es la misma del apartado a.:

$(x + 3) \cdot (x - 5) = 0$

$x^2 + 3x - 5x - 15 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

Como el coeficiente de x^2 es 2, se multiplican por 2 todos los términos de la ecuación:

$2 \cdot (x^2 - 2x - 15) = 2x^2 - 4x - 30 = 0$

c. El coeficiente de x es 6.

Se parte de la ecuación factorizada, $(x + 3) \cdot (x - 5) = 0$ y se opera con los coeficientes para que cumplan la condición indicada, en este caso basta con multiplicar todos los coeficientes por –3:

$-3 \cdot (x^2 - 2x - 15) = -3x^2 + 6x + 45 = 0$

d. El término independiente es 60.

En este caso, al igual que antes, se opera para conseguir que el término independiente sea 60, multiplicando por –4:

$4 \cdot (x^2 - 2x - 15) = -4x^2 + 8x + 60 = 0$

SOLUCIONES PÁG. 89

11 Calcula el valor del coeficiente *c* de la ecuación $5x^2 + 12x + c = 0$, una de cuyas soluciones es –2. ¿Cuál es la otra solución?

Se sustituye $x = –2$ en la ecuación:

$P(–2) = 5 \cdot (–2)^2 + 12 \cdot (–2) + c = 0 \Rightarrow c = 4$

La ecuación es, entonces $5x^2 + 12x + 4 = 0$.

La ecuación factorizada es:

$(x + 2) \cdot (x – a) = 5x^2 + 12x + 4$

$x^2 – ax + 2x – 2a$

$x^2 + (2 – a)x – 2a$

$5 \cdot [x^2 + (2 – a)x – 2a] = 5x^2 + 5 \cdot (2 – a)x – 10a = 5x^2 + 12x + 4$

Para hallar *a* se iguala alguno de los términos de igual coeficiente, por ejemplo, el término en *x:*

$5 \cdot (2 – a) = 12 \Rightarrow 10 – 5a = 12;\ a = -\frac{2}{5}$

Se comprueba que igualando el término independiente se obtiene el mismo resultado:

$–10a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$

También se puede hallar la otra raíz resolviendo la ecuación directamente:

$5x^2 + 12x + 4$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 \pm 8}{10}$$

$$x_1 = -2; x_2 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

12 Halla el valor de m para que la ecuación $2x^2 – 4x + m = 0$ tenga una raíz doble.

Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real doble:

$\Delta = b^2 – 4ac = (–4)^2 – 4 \cdot 2 \cdot m = 0 \Rightarrow 16 – 8m = 0;\ m = 2$

ECUACIONES BICUADRADAS

13 Busca una ecuación bicuadrada cuyas soluciones sean:

Se toman las raíces y se expresa la ecuación como el producto de factores.

a. ±4

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(x + 4)^2 \cdot (x - 4)^2 = 0$

$(x^2 + 8x + 16) \cdot (x^2 - 8x + 16) = 0$

$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 8x^3 - 64x^2 + 128x + 16x^2 - 128x + 256 = 0$

$x^4 - 32x^2 + 256 = 0$

b. ±1 y $\pm\frac{2}{3}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

$(x^2-1)\cdot\left(x^2-\frac{4}{9}\right)=0$

$x^4-\frac{4}{9}x^2-x^2+\frac{4}{9}=0$

$x^4-\frac{13}{9}x^2+\frac{4}{9}=0$

c. $\pm\sqrt{2}$ **y** $\pm\sqrt{3}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})=0$

$(x^2-2)\cdot(x^2-3)=0$

$x^4-3x^2-2x^2+6=0$

$x^4-5x^2+6=0$

14 Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- Se hace el cambio de variable, $x^2 = t$
- Se resuelve la ecuación de segundo grado
- Se deshace el cambio de variable, $x = \pm\sqrt{t}$

a. $\boldsymbol{x^4 - 13x^2 + 36 = 0}$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

- $t_1 = 9$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{9} = 3$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{9} = -3$

- $t_2 = 4$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{4} = -2$

b. $\boldsymbol{25x^4 - 26x^2 + 1 = 0}$

$25x^4 - 26x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 25t^2 - 26t + 1 = 0$

$$t = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{50} = \frac{26 \pm 24}{50}$$

- $t_1 = 1$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

- $t_2 = \dfrac{1}{25}$

  $$x_3 = \sqrt{t_2} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

  $$x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{\frac{1}{25}} = -\frac{1}{5}$$

c. $2x^4 - 29x^2 - 48 = 0$

$2x^4 - 29x^2 - 48 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 29t - 48 = 0$

$$t = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 + 4 \cdot 2 \cdot 48}}{2 \cdot 2} = \frac{29 \pm \sqrt{1225}}{4} = \frac{29 \pm 35}{4}$$

- $t_1 = 16$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{16} = 4$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{16} = -4$

- $t_2 = -\dfrac{3}{2}$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

d. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

- $t_1 = 4$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{4} = -2$

- $t_2 = 3$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = \sqrt{3}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{3}$

e. $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

$x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow t^2 + 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$

$t_1 = -9$, $t_2 = -1 \Rightarrow$ No hay soluciones de x reales.

f. $\mathbf{64x^4 - 20x^2 + 1 = 0}$

$64x^4 - 20x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 64t^2 - 20t + 1 = 0$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 64 \cdot 1}}{2 \cdot 64} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{128} = \frac{20 \pm 12}{128}$$

- $t_1 = \dfrac{1}{4}$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$

- $t_2 = \dfrac{1}{16}$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{\dfrac{1}{16}} = -\dfrac{1}{4}$

g. $\mathbf{-9x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$

$-9x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -9t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 9 \cdot 4}}{-2 \cdot 9} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{-18} = \frac{5 \pm 13}{-18}$$

- $t_1 = \dfrac{4}{9}$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{2}{3}$

- $t_2 = -1$

  No hay soluciones reales de t_2 pues es negativo.

h. $\mathbf{x^4 - 2x^2 + 1 = 0}$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1 \Rightarrow$ Solo hay dos raíces reales.

$x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

$x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

i. $\boldsymbol{x^4 - 53x^2 + 196 = 0}$

$x^4 - 53x^2 + 196 = 0 \Longrightarrow t^2 - 53t + 196 = 0$

$$t = \frac{53 \pm \sqrt{53^2 - 4 \cdot 1 \cdot 196}}{2 \cdot 1} = \frac{53 \pm \sqrt{2025}}{2} = \frac{53 \pm 45}{2}$$

- $t_1 = 49$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{49} = 7$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{49} = -7$

- $t_2 = 4$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = +\sqrt{4} = 2$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{4} = -2$

j. $\boldsymbol{16x^4 - 17x^2 + 1 = 0}$

$16x^4 - 17x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow 16t^2 - 17t + 1 = 0$

$$t = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1}}{2 \cdot 16} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{32} = \frac{17 \pm 15}{32}$$

- $t_1 = 1$

  $x_1 = +\sqrt{t_1} = +\sqrt{1} = 1$

  $x_2 = -\sqrt{t_1} = -\sqrt{1} = -1$

- $t_2 = \dfrac{1}{16}$

  $x_3 = +\sqrt{t_2} = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$

  $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{\dfrac{1}{16}} = -\dfrac{1}{4}$

15 Resuelve las siguientes ecuaciones:

Se descompone el polinomio en factores y se hallan las raíces:

a. $\mathbf{2x^4 + 18x^2 = 0}$

$x^2 \cdot (2x^2 + 18) = 0 \Rightarrow x = 0$ es la única raíz que cumple la ecuación.

b. $\mathbf{-3x^4 = -12}$

$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$; $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$

c. $\mathbf{x^4 - 9x^2 = 0}$

$x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$x^2 = 9 \Rightarrow x_2 = 3; x_3 = -3$

d. $\mathbf{5x^2 = 20x^4}$

$x^2 \cdot (20x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$20x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; x_3 = -\sqrt{\frac{5}{20}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

e. $\mathbf{-2x^4 + 6 = 0}$

$x = \pm\sqrt[4]{3}$; $x_1 = \sqrt[4]{3}$; $x_2 = -\sqrt[4]{3}$

f. $\mathbf{3x^4 = 75x^2}$

$x^2 \cdot (3x^2 - 75) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$3x^2 - 75 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25}$; $x_2 = 5; x_3 = -5$

g. $\mathbf{0 = 2x^4 - 2}$

$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1}; x_1 = 1; x_2 = -1$

h. $\mathbf{-4x^4 - 16x^2 = 0}$

$x^2 \cdot (-4x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$-4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow$ No tiene raíz real.

i. $\mathbf{100 = 4x^4}$

$x = \pm\sqrt[4]{25} = \pm\sqrt{5}$; $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$

j. $\mathbf{81x^4 = 1}$

$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \pm\frac{1}{3}; x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -\frac{1}{3}$

16 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{x^6 - 9x^3 + 8 = 0}$

Se hace el cambio de variable a $x^3 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$t^2 - 9t + 8 = 0$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow t_1 = 8;\ t_2 = 1$$

$x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{8} = 2$

$x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{1} = 1$

b. $\boldsymbol{27x^6 - 28x^3 + 1 = 0}$

$x^3 = t \Rightarrow 27t^2 - 28t + 1 = 0$

$$t = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 27 \cdot 1}}{2 \cdot 27} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{54} = \frac{28 \pm 26}{54} \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = \frac{1}{27}$$

$x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{1} = 1$

$$x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

c. $\boldsymbol{x^6 - 7x^3 = 8}$

$x^3 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 8 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow t_1 = 8;\ t_2 = -1$$

$x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{8} = 2$

$x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-1} = -1$

d. $\boldsymbol{8x^6 + 215x^3 - 27 = 0}$

$x^3 = t \Rightarrow 8t^2 + 215t - 27 = 0$

$$t = \frac{-215 \pm \sqrt{215^2 + 4 \cdot 8 \cdot 27}}{2 \cdot 8} = \frac{-215 \pm 217}{16} \Rightarrow t_1 = -27;\ t_2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$x_1 = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{-27} = -3$

$$x_2 = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

e. $\boldsymbol{x^8 - 17x^4 + 16 = 0}$

Se hace el cambio de variable a $x^4 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$x^4 = t \Longrightarrow t^2 - 17t + 16 = 0$

$$t = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} \Longrightarrow t_1 = 16;\ t_2 = 1$$

$x = \pm\sqrt[4]{t_1} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{t_2} = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

f. $\boldsymbol{32x^{10} + 33x^5 + 1 = 0}$

Se hace el cambio de variable a $x^5 = t$ para resolver una ecuación de segundo grado:

$x^5 = t \Longrightarrow 32t^2 + 33t + 1 = 0$

$$t = \frac{-33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 32 \cdot 1}}{2 \cdot 32} = \frac{-33 \pm 31}{64} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{32}; t_2 = -1$$

$$x_1 = \sqrt[5]{t_1} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \sqrt[5]{t_2} = \sqrt[5]{-1} = -1$$

g. $\boldsymbol{x^8 = x^4}$

$x^8 - x^4 = 0$

$x^4\,(x^4 - 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;$

$x^4 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$

h. $\boldsymbol{x^6 - 64 = 0}$

$x^6 = 64 \Longrightarrow x = \sqrt[6]{64} = \pm 2$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

17 Encuentra las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\boldsymbol{(x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 - 4 \cdot (x^2 - 1) = 0}$

$(x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

Se hace un cambio de variable $x^2 = t \Longrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Longrightarrow t_1 = 5;\ t_2 = 1$$

$x = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{5}; x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$

$x = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{1}; x_3 = 1; x_4 = -1$

b. $\mathbf{5x^2 \cdot (2x^2 - 3) - 10x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 1)}$

$10x^4 - 15x^2 - 10x^2 = 5x^4 - 5x^2$

$5x^4 - 20x^2 = 0$

$5x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2;\ x_3 = -2$

c. $\mathbf{3x \cdot (x - 1)^2 = (x^2 + 2) \cdot (2x^2 - 1) + 3x \cdot (x^2 + 1) - 3}$

$3x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 2x^4 - x^2 + 4x^2 - 2 + 3x^3 + 3x - 3$

$3x^3 - 6x^2 + 3x = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 5$

$2x^4 + 9x^2 - 5 = 0$

Se hace un cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow 2t^2 + 9t - 5 = 0$

$t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm 11}{4} \Rightarrow t_1 = -5;\ t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Solo hay dos raíces reales.

$x = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\mathbf{x^2 \cdot (x + 1)^2 = x^2 \cdot (x^2 - 3)}$

$x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^4 - 3x^2$

$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^4 - 3x^2$

$2x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (2x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$2x + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

18 Sabiendo que el parámetro *m* es un número natural, averigua los valores que debe tomar para que la ecuación $x^4 + 4x^2 + m = 0$ tenga solo dos soluciones reales.

Se hace un cambio de variable, $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 4t + m = 0$

Para que la ecuación inicial tenga solo dos soluciones reales el discriminante de la ecuación de segundo grado ha de ser:

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0 \Rightarrow 16 - 4m = 0 \Rightarrow m = 4$

En ese caso la solución de la ecuación con variable *t* es:

$t = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$ que en realidad no ofrece soluciones reales, pues $x = \sqrt{-2}$

19 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{-4x^2 = \dfrac{(2x^2+1)\cdot(x^2-3)}{3} - \dfrac{(3x^2-1)\cdot(x^2+3)}{4}}$

$$\frac{-48x^2}{12} = \frac{4\cdot(2x^2+1)\cdot(x^2-3)}{12} - \frac{3\cdot(3x^2-1)\cdot(x^2+3)}{12}$$

$$-48x^2 = 4\cdot(2x^2+1)\cdot(x^2-3) - 3\cdot(3x^2-1)\cdot(x^2+3)$$

$$-48x^2 = (8x^2+4)\cdot(x^2-3) - (9x^2-3)\cdot(x^2+3)$$

$$-48x^2 = 8x^4 - 24x^2 + 4x^2 - 12 - 9x^4 - 27x^2 + 3x^2 + 9$$

$$-48x^2 = -24x^2 + 4x^2 - 12 - 27x^2 + 3x^2 + 9$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0;\ x^2 = t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm2}{2}$$

$t_1 = 3$; $t_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{t}$; $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b. $\boldsymbol{\dfrac{3x^2\cdot(x+2)^2 - 7x^3}{5} = \dfrac{x^2\cdot(x+1)^2}{2}}$

$$\frac{3x^2\cdot(x^2+4x+4) - 7x^3}{5} = \frac{x^2\cdot(x^2+2x+1)}{2}$$

$$\frac{3x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 7x^3}{5} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{2}$$

$$6x^4 + 24x^3 + 24x^2 - 14x^3 = 5x^4 + 10x^3 + 5x^2$$

$$x^4 + 19x^2 = 0$$

$$x^2\cdot(x^2+19) = 0 \Rightarrow x = 0$$

c. $\boldsymbol{3\cdot(x^2-5) = \dfrac{(x^2+3)\cdot(x^2-3)}{4}}$

$$12\cdot(x^2-5) = x^4 - 9$$

$$12x^2 - 60 = x^4 - 9$$

$$x^4 - 12x^2 + 51 = 0$$

$$x^4 - 12x^2 + 51 = 0;\ x^2 = t \Rightarrow t^2 - 12t + 51 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot1\cdot51}}{2} = \frac{12\pm\sqrt{-60}}{2}$$

No tiene solución real.

d. $\dfrac{x^4-5x^2}{8}=\dfrac{x^2\cdot(x^2-4)}{6}$

$6x^4-30x^2=8x^2\cdot(x^2-4)$

$6x^4-30x^2=8x^4-32x^2$

$2x^4-2x^2=0$

$2x^2\cdot(x^2-1)=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=\sqrt{1}=1;\ x_3=-\sqrt{1}=-1$

ECUACIONES FACTORIZADAS Y POLINÓMICAS. ECUACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

20 Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{(x+5)\cdot(x+1)\cdot(x-3)=0}$

$x_1=-5;\ x_2=-1;\ x_3=3$

b. $\mathbf{x\cdot(2x+8)\cdot(x^2-1)=0}$

$x_1=0;$

$2x+8=0\Rightarrow x_2=4;$

$x^2-1=0\Rightarrow x_3=\sqrt{1}=1;\ x_4=-\sqrt{1}=-1$

c. $\mathbf{3x^2\cdot(-x+2)\cdot(-2x^2+50)\cdot(x^2-3x)=0}$

$3x^2=0\Rightarrow x_1=0;$

$-x+2=0\Rightarrow x_2=2;$

$-2x^2+50\Rightarrow x_3=\sqrt{25}=5;\ x_4=-\sqrt{25}=-5$

$x^2-3x=0\Rightarrow x\cdot(x-3)=0;\ x-3=0;\ x_5=3$

d. $\mathbf{(x^2-4x+4)\cdot(-x^2+2)=0}$

$x^2-4x+4=0;\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=2\ ;\ x_1=2$

$-x^2+2=0\Rightarrow x_2=\sqrt{2}\ ;\ x_3=-\sqrt{2}$

e. $\mathbf{(x^3+1)\cdot(3x+2)\cdot(x^4-1)=0}$

$x^3+1=0\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{-1}=-1$

$3x+2=0\Rightarrow x_2=-\dfrac{2}{3}$

$x^4-1=0\Rightarrow x_3=+\sqrt[4]{1}=1$ (doble); $x_4=-\sqrt[4]{1}=-1$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 3x = 0}$

$x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Longrightarrow x_2 = -3;\ x_3 = 1$

b. $\boldsymbol{x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0}$

Se aplica la regla de Ruffini:

	1	–4	1	6
–1		–1	5	–6
	1	–5	6	0

$x_1 = -1$

	1	–5	6
3		3	–6
	1	–2	0

$x_2 = 3$

$x_3 = 2$

c. $\boldsymbol{x^3 - 3x = 0}$

$x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{3}\ ;\ x_3 = -\sqrt{3}$

d. $\boldsymbol{3x^5 - 5x^4 + 2x^3 = 0}$

$x^3 \cdot (3x^2 - 5x + 2) = 0$

$x_1 = 0$

$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \dfrac{5 \pm 1}{6};\ x_2 = 1;\ x_3 = \dfrac{2}{3}$

e. $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0}$

Se aplica la regla de Ruffini:

	1	2	4	8
–2		–2	0	–8
	1	0	4	0

$x_1 = -2$

$(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

f. $6x^4 + 7x^3 - 4x^2 = 7x + 2$

$6x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 7x - 2 = 0$

Se aplica la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & -4 & -7 & -2 \\ 1 & & 6 & 13 & 9 & 2 \\ \hline & 6 & 13 & 9 & 2 & 0 \end{array}$$

$x_1 = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 9 & 2 \\ -1 & & -6 & -7 & -2 \\ \hline & 6 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

$x_2 = -1$

Se resuelve la ecuación de segundo grado $6x^2 + 7x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3};\ x_4 = -\frac{1}{2}$$

g. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$

Se aplica la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$x_1 = 2$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ y $x_3 = -2$.

h. $2x^5 - 10x^4 - 2x^3 = 10x^2$

$2x^5 - 10x^4 - 2x^3 - 10x^2 = 0$

$x^2 \cdot (2x^3 - 10x^2 - 2x - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Al aplicar la regla del Ruffini a la ecuación $2x^3 - 10x^2 - 2x - 10 = 0$ no se localizan raíces enteras.

22 Halla la solución de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{3x}}$

$$\frac{12-5x^2}{12x^2} = \frac{1}{3x}$$

$$\left(12-5x^2\right)\cdot 3x = 12x^2$$

$$36x - 15x^3 - 12x^2 = 0$$

$$(–15x^2 - 12x + 36)\cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$–15x^2 - 12x + 36 = –5x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4\cdot 5\cdot 12}}{–10} = \frac{4 \pm 16}{–10}$$

$x_2 = –2$; $x_3 = \dfrac{6}{5}$

Se comprueba que las soluciones cumplen con la ecuación inicial:

$x_1 = 0$ no la cumple, de modo que las soluciones son $x_2 = –2$; $x_3 = \dfrac{6}{5}$

b. $\mathbf{\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} = 3}$

$$\frac{2x\cdot(x-1) + x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = 3$$

$$2x^2 - 2x + x^2 + x = 3\cdot(x+1)\cdot(x-1)$$

$$3x^2 - x = 3\cdot\left(x^2 - 1\right)$$

$$3x^2 - x = 3x^2 - 3 \Rightarrow x = 3$$

Se comprueba que la solución $x = 3$ cumple con la ecuación inicial.

c. $\mathbf{\dfrac{2-x}{x-5} = \dfrac{x-2}{x+5}}$

$$(2-x)\cdot(x+5) = (x-2)\cdot(x-5)$$

$$2x + 10 - x^2 - 5x = x^2 - 5x - 2x + 10$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$x\cdot(2x-4) = 0$$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Se comprueba que las soluciones cumplen con la ecuación inicial.

d. $\mathbf{\dfrac{2-x}{x}=\dfrac{x+1}{x-1}-3}$

$$\frac{2-x}{x}=\frac{x+1-3x+3}{x-1}$$

$$(2-x)\cdot(x-1)=(-2x+4)\cdot x$$

$$2x-2-x^2+x=-2x^2+4x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$

x_1 = 2; x_2 = –1

Se comprueba que las soluciones cumplen con la ecuación inicial.

e. $\mathbf{\dfrac{x}{x+6}+\dfrac{x+1}{x}=-\dfrac{3}{x^2}}$

$$\frac{x\cdot x+(x+1)\cdot(x+6)}{(x+6)\cdot x}=-\frac{3}{x^2}$$

$$\frac{x^2+x^2+6x+x+6}{(x+6)\cdot x}=-\frac{3}{x^2}$$

$$\left(2x^2+7x+6\right)\cdot x^2=-3\cdot(x+6)\cdot x$$

$$2x^4+7x^3+9x^2+18x=0\Rightarrow x_1=0$$

$$2x^3+7x^2+9x+18=0$$

Se buscan más raíces con la regla de Ruffini:

	2	7	9	18
–3		–6	–3	–18
	2	1	6	0

x_2 = –3 es otra raíz.

No existen más raíces reales porque la ecuación del polinomio que queda, $2x^2 + x + 6 = 0$ tiene discriminante negativo.

Se comprueba que las raíces cumplan con la ecuación inicial. En este caso solamente la raíz x_2 = –3 la cumple.

f. $\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{3-x}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+4}}$

$$\frac{x-1}{x-2}=\frac{(3-x)\cdot\left(x^2+4\right)-2\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)}\Rightarrow\frac{x-1}{x-2}=\frac{3x^2+12-x^3-4x-2x-4}{(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{x-2}=\frac{3x^2-x^3-6x+8}{(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-1)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)=\left(3x^2-x^3-6x+8\right)\cdot(x-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2+2x-x-2\right)\cdot\left(x^2+4\right)=3x^3-x^4-6x^2+12x-6x^2+2x^3+8x-16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4+2x^3-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8=-x^4+5x^3-12x^2+20x-16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4+x^3+2x^2+4x-8=-x^4+5x^3-12x^2+20x-16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^4-4x^3+14x^2-24x+8=0$$

Se aplica Ruffini y se observa que no tiene raíces enteras.

g. $\boldsymbol{5\cdot(x+1)=\dfrac{10}{x-1}}$

$$5\cdot(x+1)\cdot(x-1)=10\Rightarrow 5\cdot\left(x^2-1\right)=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2-5-10=0;\ 5x^2-15=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{15}{5}}=\pm\sqrt{3}$$

Se comprueba que las dos raíces, $x_1=\sqrt{3}$ y $x_2=-\sqrt{3}$ cumplen con la ecuación inicial.

h. $\boldsymbol{\dfrac{2-3x}{x^2-1}+\dfrac{x+3}{x^2+x}=\dfrac{x-3}{x^2-x}}$

$$\frac{2-3x}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{x+3}{x\cdot(x+1)}=\frac{x-3}{x\cdot(x-1)}\Rightarrow\frac{(2-3x)\cdot x+(x+3)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-3)}{x\cdot(x-1)}$$

$$\Rightarrow\frac{2x-3x^2+x^2-x+3x-3}{x+1}=x-3\Rightarrow -2x^2+4x-3=(x-3)\cdot(x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2+4x-3=x^2+x-3x-3\Rightarrow -3x^2+6x=0$$

$$x\cdot(6-3x)=0\Rightarrow x=0;x=2$$

Se comprueba que solo la raíz, $x=2$ cumple con la ecuación inicial.

ECUACIONES IRRACIONALES

23 Comprueba si los números –1, 0, $\frac{3}{5}$ y 7 son solución de esta ecuación sin resolverla:

$$\boldsymbol{\sqrt{5x+1}+2x=3\cdot(x-1)+2}$$

Se comprueba si los números son raíces de la ecuación:

- $\sqrt{5\cdot(-1)+1}+2\cdot(-1)=3\cdot(-1-1)+2$. No existe número real que cumpla esta relación.
- $\sqrt{5\cdot 0+1}+2\cdot 0=3\cdot(0-1)+2; 1\neq -1$. No cumple con la ecuación.
- $\sqrt{5\cdot\frac{3}{5}+1}+2\cdot\frac{3}{5}=3\cdot(\frac{3}{5}-1)+2; \frac{16}{5}\neq\frac{4}{5}$. No cumple con la ecuación.
- $\sqrt{5\cdot 7+1}+2\cdot 7=3\cdot(7-1)+2; 20=20$

Es solución $x = 7$

SOLUCIONES PÁG. 90

24 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{10-x=\sqrt{x+2}}$

$(10-x)^2=x+2$

$100-20x+x^2=x+2$

$x^2-21x+98=0$

$x=\dfrac{21\pm\sqrt{21^2-4\cdot 98}}{2}=\dfrac{21\pm 7}{2}$

$x_1=14$; $x_2=7$

Se comprueba que solo la raíz, $x_2 = 7$ cumple con la ecuación inicial.

b. $\boldsymbol{2\sqrt{x+4}-4=-4x}$

$2\sqrt{x+4}=-4x+4$

$4\cdot(x+4)=(-4x+4)^2$

$4x+16=16x^2-32x+16$

$16x^2-36x=0\Rightarrow x_1=0$

$16x-36=0\Rightarrow x_2=\dfrac{9}{4}$

Se comprueba que solo la raíz, $x_1 = 0$ cumple con la ecuación inicial.

c. $\mathbf{3x-2=x+\sqrt{x+2}}$

$2x-2=\sqrt{x+2}$

$4\cdot(x-1)^2=x+2$

$4x^2-8x+4=x+2$

$4x^2-9x+2=0$

$x=\dfrac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\dfrac{9\pm7}{8}$

$x_1=2;\ x_2=\dfrac{1}{4}$

Se comprueba que solo la raíz, x_1 = 2 cumple con la ecuación inicial.

d. $\mathbf{\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=4}$

$\dfrac{x}{x+2}=16$

$x=16\cdot(x+2)$

$x=16x+32$

$x=-\dfrac{32}{15}$

Se comprueba que la raíz cumple con la ecuación inicial.

e. $\mathbf{\sqrt{x^2-5x+7}-2x+5=x-3}$

$\sqrt{x^2-5x+7}=2x-5+x-3\Rightarrow\sqrt{x^2-5x+7}=3x-8\Rightarrow x^2-5x+7=(3x-8)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-5x+7=9x^2-48x+64\Rightarrow 8x^2-43x+57=0$

$x=\dfrac{43\pm\sqrt{43^2-4\cdot8\cdot57}}{16}=\dfrac{43\pm5}{16}$

$x_1=3;\ x_2=\dfrac{19}{8}$

Se comprueba que solo la raíz, x_1 = 3 cumple con la ecuación inicial.

f. $\mathbf{x-1-\sqrt{2x-1}=-x}$

$2x-1=\sqrt{2x-1}\Rightarrow(2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\Rightarrow 4x^2-4x+1=2x-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-6x+2=0$

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\dfrac{6\pm2}{8}$

$x_1=1;\ x_2=\dfrac{1}{2}$

Se comprueba que las dos raíces cumplen con la ecuación inicial.

g. $\sqrt[3]{\mathbf{2x^2-5x}}=\boldsymbol{x}$

$\left(\sqrt[3]{2x^2-5x}\right)^3=x^3\Rightarrow 2x^2-5x=x^3\Rightarrow x\cdot(-x^2+2x-5)=0\Rightarrow x_1=0$

$-x^2+2x-5=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{-2}\Rightarrow$ no tiene solución real.

La única solución es $x_1 = 0$

h. $\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}-\dfrac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$\dfrac{2\sqrt{x}}{4}=\dfrac{4x-x+1}{4}\Rightarrow 2\sqrt{x}=3x+1\Rightarrow\left(2\sqrt{x}\right)^2=\left(3x+1\right)^2\Rightarrow 4x=9x^2+6x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2+2x+1=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot9\cdot1}}{2\cdot9}\Rightarrow$ no tiene solución real.

25 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\sqrt{\mathbf{2x+7}}=\sqrt{\mathbf{x^2+8}}$

$\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2\Rightarrow 2x+7=x^2+8\Rightarrow x^2-2x+1=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\dfrac{2\pm0}{2}=1$

Se comprueba que la raíz, $x_1 = 1$ cumple con la ecuación inicial.

b. $\sqrt{\mathbf{2x+4}}+\sqrt{\mathbf{5x+9}}=\mathbf{5}$

$\left(\sqrt{2x+4}+\sqrt{5x+9}\right)^2=25$

$2x+4+5x+9+2\sqrt{(2x+4)\cdot(5x+9)}=25$

$7x-12+2\sqrt{10x^2+19x+20x+36}=0$

$7x-12=-2\sqrt{10x^2+39x+36}$

$(7x-12)^2=4\cdot\left(10x^2+39x+36\right)$

$49x^2-168x+144=40x^2+156x+144$

$9x^2-324x=0$

$x\cdot(9x-324)=0\Rightarrow x_1=0$

$9x-324=0\Rightarrow x_2=36$

Se comprueba que solo la raíz, $x_1 = 0$ cumple con la ecuación inicial.

c. $\sqrt{x-3} = \sqrt{x} + 4$

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+4\right)^2 \Rightarrow x-3 = x+8\sqrt{x}+16 \Rightarrow -8\sqrt{x} = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -64x = 361 \Rightarrow x = \frac{361}{64}$$

Se comprueba que la solución no cumple con la ecuación inicial, luego no existe solución.

d. $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = 2$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}\right)^2 = 4 \Rightarrow x+3x-2+2\sqrt{x\cdot(3x-2)} = 4 \Rightarrow 4x-6 = -2\sqrt{x\cdot(3x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x-6)^2 = 4x\cdot(3x-2) \Rightarrow 16x^2-48x+36 = 12x^2-8x \Rightarrow 4x^2-40x+36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-10x+9 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$x_1 = 9$; $x_2 = 1$;

Se comprueba que solo la raíz, $x_2 = 1$ cumple con la ecuación inicial.

e. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x+3+x-3-2\sqrt{(x+3)\cdot(x-3)} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{x^2-9} \Rightarrow x^2 = 4\cdot\left(x^2-9\right) \Rightarrow x^2 = 4x^2-36 \Rightarrow 3x^2-36 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{12}$$

Se comprueba que la raíz, $x_1 = \sqrt{12}$ cumple con la ecuación inicial.

f. $\sqrt{3x-9} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{x}$

$$\sqrt{3x-9} = \sqrt{2x-5}-\sqrt{x} \Rightarrow \left(\sqrt{3x-9}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-5}-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-9 = 2x-5+x-2\sqrt{(2x-5)\cdot x} \Rightarrow 4 = 2\sqrt{\left(2x^2-5x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = 4\cdot\left(2x^2-5x\right) \Rightarrow 4 = 2x^2-5x \Rightarrow 2x^2-5x-4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2+4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

Al sustituir en la ecuación inicial se comprueba que no tiene solución.

INECUACIONES

26 Comprueba, sin resolver la inecuación, si alguno de los resultados propuestos es su solución.

$$1 + \frac{x-5}{4} > -3\cdot(x+2)$$

Se sustituye el valor solución en los dos miembros de la inecuación y se comprueba si la cumple:

a. ***x* = –4**

$$1+\frac{-4-5}{4}=\frac{13}{4}$$
$$-3\cdot(-4+2)=6$$

No la cumple, pues $\frac{13}{4}\quad 6$

b. ***x* = –3**

$$1+\frac{-3-5}{4}=-1$$
$$-3\cdot(-3+2)=3$$

No la cumple, pues 1   3

c. ***x* = 1**

$$1+\frac{1-5}{4}=0$$
$$-3\cdot(1+2)=-9$$

Sí la cumple, pues 0 > –9

d. $\boldsymbol{x=\frac{13}{4}}$

$$1+\frac{13/4-5}{4}=\frac{9}{16}$$
$$-3\cdot(\frac{13}{4}+2)=-\frac{63}{4}$$

Sí la cumple, pues $\frac{9}{16}>-\frac{63}{4}$

27 Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa el resultado en forma de intervalo:

a. ***x* + 3 ≤ –1**

$x\le -4 \Longrightarrow (-\infty\ ,\ -4]$

b. **2*x* > 5 + *x***

$x>5 \Longrightarrow (5\ ,\ +\infty)$

c. **3*x* < –2**

$$x<-\frac{2}{3}\ \Longrightarrow\ \left(-\infty\ ,\ -\frac{2}{3}\right)$$

d. $\dfrac{2x}{5} \leq -4$

$x \leq \dfrac{4 \cdot 5}{2}$

$x \leq 10 \Rightarrow (-\infty\ , 10]$

e. **7 + x ≥ 2**

$x \geq -5 \Rightarrow [-5\ , +\infty)$

f. **$4x - 1 \geq 5x + 6$**

$-7 \geq x$; $x \leq -7 \Rightarrow (-\infty\ , -7]$

g. **$-2 \cdot (x - 4) > -10$**

$-2x + 8 > -10$; $-x > -9$

$x < 9 \Rightarrow (-\infty\ , 9)$

h. $\dfrac{x}{3} + 2 < 5$

$x + 6 < 15$

$x < 9 \Rightarrow (-\infty\ , 9)$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

28 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. **$-4x + 5 + 6x - 3 < x + 3x - 7 - 1$**

$2 + 2x < 4x - 8$

$10 < 2x$; $x > 5 \Rightarrow (5\ , +\infty)$

b. **$3 - 2x + 3x - 9 + x \geq -1 + 4x - 3$**

$2x - 6 \geq 4x - 4$

$-2 \geq 2x$; $-1 \geq x \Rightarrow (-\infty\ , -1]$

c. **$4 + (5x - 3) - 2 > 7x - (1 - 5x) + 8$**

$4 + 5x - 3 - 2 > 7x - 1 + 5x + 8$

$5x - 1 > 12x + 7$

$-8 > 7x \Rightarrow x < -\dfrac{8}{7} \Rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{8}{7}\right)$

d. **$3 \cdot (x - 2) - 8x \leq 2 - x + 5 \cdot (3 - x)$**

$3x - 6 - 8x \leq 2 - x + 15 - 5x$

$-6 - 5x \leq -6x + 17$

$x \leq 23 \Rightarrow (-\infty\ , 23]$

e. $1 - 2 \cdot (3x - 6) > 7 - 3 \cdot (4 + 5x)$

$1 - 6x + 12 > 7 - 12 - 15x$

$9x > -18;\ x > -2 \Longrightarrow (-2\ ,\ \infty)$

f. $-5 \cdot (3 + 2x) + 3 \cdot (-x + 2) \leq 0$

$-15 - 10x - 3x + 6 \leq 0$

$-9 \leq 13x;\ x \geq -\frac{9}{13} \Rightarrow \left[-\frac{9}{13}\ ,\ +\infty\right)$

g. $4x - 1 + 7 \cdot (x - 2) < 11x - 3$

$4x - 1 + 7x - 14 < 11x - 3$

$11x - 15 < 11x - 3;\ 0x < 12 \Longrightarrow (-\infty\ ,\ +\infty)$

29 Resuelve estas inecuaciones:

a. $2x - \frac{5}{3} > \frac{2x}{4} - 3$

$\frac{6x-5}{3} > \frac{2x-12}{4}$

$24x - 20 > 6x - 36$

$18x > -16; x > -\frac{8}{9} \Rightarrow \left(-\frac{8}{9}\ ,\ +\infty\right)$

b. $\frac{-2x+5}{8} \geq 1 + \frac{x-9}{10}$

$\frac{-2x+5}{8} \geq \frac{10+x-9}{10}$

$-20x + 50 \geq 8 + 8x$

$42 \geq 28x;\ x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\infty\ ,\ \frac{3}{2}\right]$

c. $\frac{2 \cdot (4x-1)}{5} - \frac{3 \cdot (x-2)}{2} > \frac{-5 \cdot (-1-x)}{3}$

$\frac{4 \cdot (4x-1) - 15 \cdot (x-2)}{10} > \frac{-5 \cdot (-1-x)}{3}$

$3 \cdot 4 \cdot (4x-1) - 3 \cdot 15 \cdot (x-2) > -5 \cdot 10 \cdot (-1-x)$

$48x - 12 - 45x + 90 > 50 + 50x$

$-47x > -28;\ 47x < 28;\ x < \frac{28}{47} \Rightarrow \left(-\infty\ ,\ \frac{28}{47}\right)$

30 Dada la inecuación $5x - 4 \geq \frac{3x}{2} + m$, halla el valor de *m* si la solución de la inecuación es $\left[\frac{20}{7}, +\infty\right)$

$$5x - 4 \geq \frac{3x}{2} + m$$
$$10x - 8 \geq 3x + 2m$$
$$7x \geq 2m + 8;\ x \geq \frac{2m+8}{7}$$

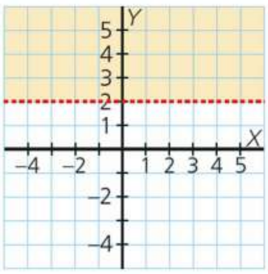
Como el valor $\frac{20}{7}$ es un extremo del intervalo,

$$x \geq \frac{20}{7} = \frac{2m+8}{7} \Rightarrow 2m + 8 = 20;\ m = \frac{12}{2} = 6$$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

31 Escribe la inecuación cuya solución se corresponde con el semiplano sombreado.

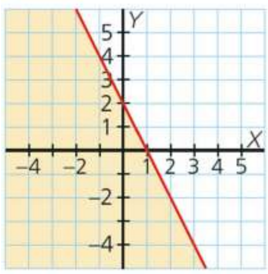
a.



La recta que limita los dos semiplanos es $y = 2$

El semiplano solución es $y > 2$

b.

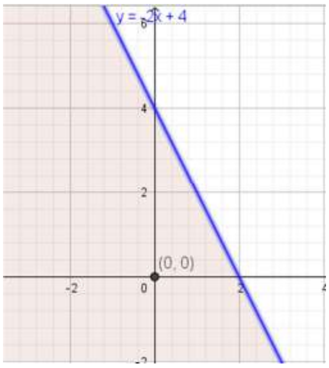


La recta que limita los dos semiplanos es $y = 2 \cdot (1 - x)$

El semiplano solución es el que incluye al punto (0 ,0) es decir, $y \leq -2x + 2$

32 Resuelve las siguientes inecuaciones:

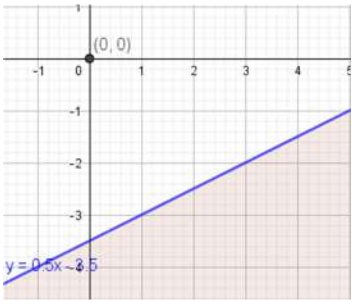
a. $2x + y \leq 4$



- Se representa la recta, $y = 4 - 2x$ que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$0 \leq 4 \Longrightarrow$ El punto (0 , 0) pertenece al plano solución.

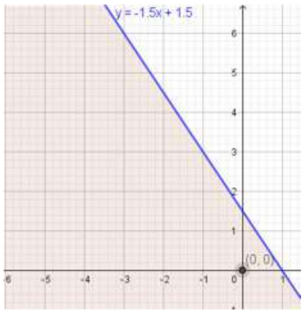
b. $x - 2y > 7$



- Se representa la recta, $y = \dfrac{x-7}{2}$ que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$0 \quad 7 \Longrightarrow$ El punto (0 , 0) no pertenece al plano solución.

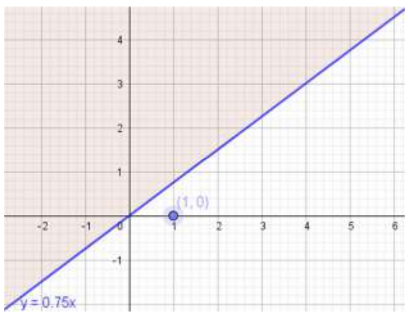
c. $3x - 1 < -2y + 2$



- Se representa la recta, $y = \dfrac{3-3x}{2}$ que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$-1 < 2 \Longrightarrow$ El punto (0 , 0) pertenece al plano solución.

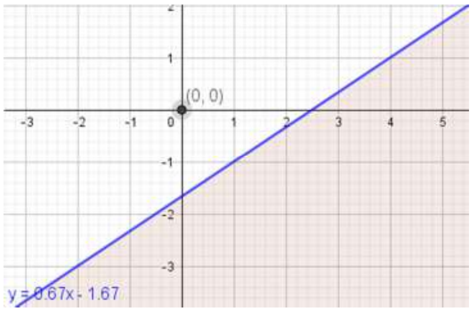
d. $\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{y}{3}$



- Se representa la recta, $y = \dfrac{3x}{4}$ que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (1 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$\dfrac{1}{4} \geq 0 \Longrightarrow$ El punto (1 , 0) no pertenece al plano solución.

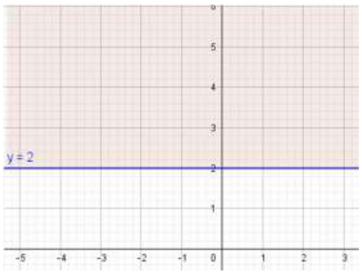
e. $2 \cdot (x - 1) \geq 3 \cdot (y + 1)$



- Se representa la recta, $y = \dfrac{2x-5}{3}$ que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

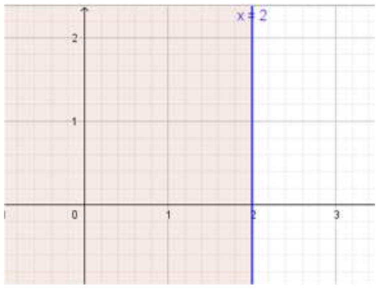
$-2 \leq 3 \Rightarrow$ El punto (0 , 0) no pertenece al plano solución.

f. $-1 - (x - 2y) > -x + 3$



- Se representa la recta, $-1 - (x - 2y) = -x + 3$, que es $y = 2$ y que divide al plano en dos semiplanos.
- Se observa cuál es el semiplano solución de la inecuación y > 2.

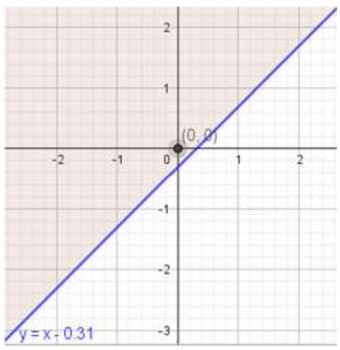
g. $-3 \cdot (2y + 4) + x \leq -6y - 10$



- Se representa la recta,

  $-3 \cdot (2y + 4) + x = -6y - 10$, que es $x = 2$ y que divide al plano en dos semiplanos.
- Se observa cuál es el semiplano solución de la inecuación $x \leq 2$.

h. $\dfrac{5 \cdot (x-y)}{2} < 1 + \dfrac{3 \cdot (y-x)}{4}$



- Se representa la recta,

  $$\frac{5 \cdot (x-y)}{2} = 1 + \frac{3 \cdot (y-x)}{4}$$
  $$\frac{5x-5y}{2} = \frac{4+3y-3x}{4}$$
  $$20x - 20y = 8 + 6y - 6x$$
  $$y = \frac{26x-8}{26} = x - \frac{4}{13}$$

  que divide al plano en dos semiplanos.
- Se toma un punto que no pertenezca a esa recta, por ejemplo, (0 , 0) y se sustituye en la inecuación con el fin de ver si este punto está dentro o fuera del semiplano solución de la inecuación:

$0 < 1 \Rightarrow$ El punto (0 , 0) pertenece al plano solución.

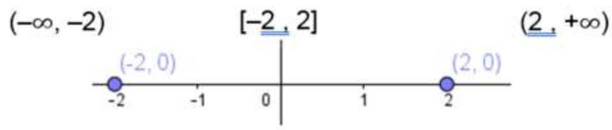
INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

33 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $2x^2 \leq 8$

Se resuelve la ecuación $2x^2 = 8x^2$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Se observa qué intervalos cumplen la inecuación:



- En el intervalo (–∞ , –2) la inecuación no se cumple, pues $2x^2 \geq 8$.
- En el intervalo [–2 , 2] la inecuación se cumple, pues $2x^2 \geq 8$.
- En el intervalo (2, +∞) la inecuación no se cumple, pues $2x^2 \geq 8$.

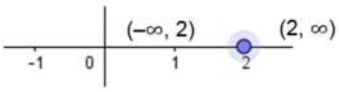
La solución es [–2 , 2]

b. $(2 - x)^2 \leq 0$

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = 2$$

Se observa qué intervalos cumplen la inecuación:



- En el intervalo (–∞ , 2) la inecuación no se cumple, pues $(2 - x)^2 \geq 0$.
- En el intervalo (2 , ∞) la inecuación no se cumple, pues $(2 - x)^2 \leq 0$.
- La inecuación solo se cumple en el punto $x = 2$.

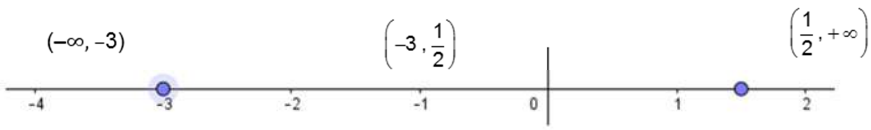
c. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

Se resuelve la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 6$$

Se observa qué intervalos cumplen la inecuación:



- En el intervalo (–∞ , –3] la inecuación se cumple.
- En el intervalo $\left(-3\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ la inecuación no se cumple.
- En el intervalo $\left[\frac{1}{2}\ ,+\infty\right)$ la inecuación se cumple.

La solución es (–∞ , –3] ∪ $\left[\frac{1}{2}\ ,+\infty\right)$.

d. $(x + 1) \cdot (x - 1) < x + 1$

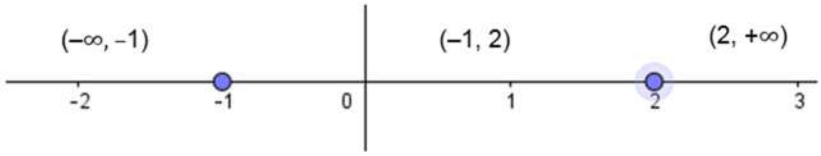
Se resuelve la ecuación $x^2 - 1 = x + 1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 2;\ x_2 = -1$

Se observa qué intervalos cumplen la inecuación:



- En el intervalo (–∞ , –1) la inecuación no se cumple.
- En el intervalo (–1 , 2) la inecuación se cumple.
- En el intervalo (2 , +∞) la inecuación no se cumple.

La solución es (–1 , 2).

e. $x \cdot (x - 2) < -2 \cdot (3 + x)$

Se resuelve la ecuación $x \cdot (x - 2) < -2 \cdot (3 + x)$

$x^2 - 2x = -6 - 2x$

$x^2 = -6 \Longrightarrow$ no tiene solución real.

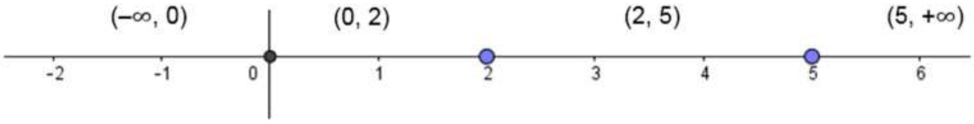
f. $x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5) \leq 0$

Se resuelve la ecuación $x \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$x_2 = 5;\ x_3 = 2$



- En el intervalo (–∞ , 0] la inecuación se cumple.
- En el intervalo (0 , 2) la inecuación no se cumple.

- En el intervalo [2 , 5] la inecuación se cumple.
- En el intervalo (5 , +∞] la inecuación no se cumple.

La solución es (–∞ , 0] ∪ [2, 5].

g. $x^4 + 10x^2 + 9 \geq 0$

Se observa que cualquier número real cumplirá la ecuación, de modo que la solución es (–∞ , +∞).

h. $3x^3 - 10x^2 - 8x < 0$

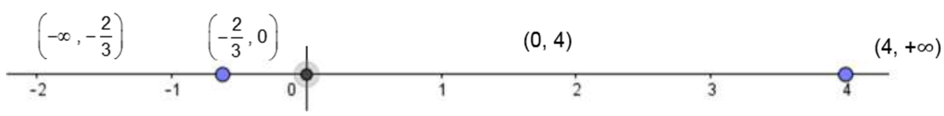
Se resuelve la ecuación $x \cdot (3x^2 - 10x - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$3x^2 - 10x - 8 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$x_2 = 4$

$x_3 = -\frac{2}{3}$



- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ la inecuación se cumple.
- En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ la inecuación no se cumple.
- En el intervalo (0, 4) la inecuación se cumple.
- En el intervalo (4 , +∞] la inecuación no se cumple.

La solución es $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, 4)$.

i. $4x^3 - 12x^2 + 16 > 0$

Se resuelve la ecuación $4x^3 - 12x^2 + 16 = 0$

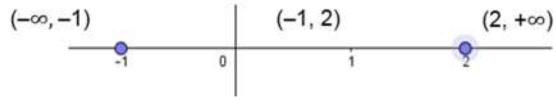
	4	–12	0	16
–1		–4	16	–16
	4	–16	16	0

$x_1 = -1$

	4	–16	16
2		8	–16
	4	–8	0

$x_2 = 2$

La inecuación factorizada es $(x + 1) \cdot (x - 2)^2 > 0$



- En el intervalo (–∞ , –1) la inecuación no se cumple.
- En el intervalo (–1 , 2) la inecuación se cumple.
- En el intervalo (2, +∞) la inecuación se cumple.

La solución es (–1 , 2) ∪ (2, +∞)

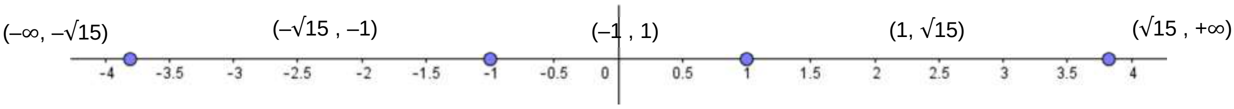
j. $\boldsymbol{x^4 - 16x^2 + 15 < 0}$

Se resuelve la ecuación $t^2 - 16t + 15 = 0$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm 14}{2}$$

$$t_1 = 15;\ t_2 = 1 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{15};\ x = 1$$



- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{15})$ la inecuación no se cumple.
- En el intervalo $(-\sqrt{15}, -1)$ la inecuación se cumple.
- En el intervalo (–1 , 1) la inecuación no se cumple.
- En el intervalo $(1, \sqrt{15})$ la inecuación se cumple.
- En el intervalo $(\sqrt{15}, +\infty)$ la inecuación no se cumple.

La solución es $(-\sqrt{15}, -1) \cup (1, \sqrt{15})$

34 Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas para repasar las inecuaciones:

http://conteni2.educarex.es/mats/11825/contenido

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 91

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

35 Félix ha comprado en la frutería naranjas a 0,80 €/kg y manzanas a 1,20 €/kg. En total ha adquirido 7 kg de fruta, por los que ha pagado 7,20 €. ¿Cuántos kilos de cada tipo de fruta se ha llevado?

Se llama x a la cantidad en kilogramos de naranjas e y a la cantidad en kilogramos de manzanas, y se plantean las ecuaciones con los datos del problema:

Lo que ha pagado en euros en total: $0{,}8x + 1{,}2y = 7{,}2$

La cantidad en kilogramos que ha comprado en total: $x + y = 7$

Se resuelve el sistema:

$\begin{cases} 0{,}8x + 1{,}2y = 7{,}2 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}8x + 1{,}2y = 7{,}2 \\ x = 7 - y \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}8 \cdot (7 - y) + 1{,}2y = 7{,}2 \\ x = 7 - y \end{cases}$

$5{,}6 - 0{,}8y + 1{,}2y = 7{,}2$

$0{,}4y = 1{,}6 \Rightarrow y = 4\ ;\ \ x = 3$

Se ha llevado 4 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.

36 Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área se incrementa en 104 cm^2. Calcula el perímetro y el área del cuadrado inicial.

El lado del cuadrado es x, y por tanto su área es $A_1 = x^2$.

Si aumenta su lado, $x + 4$, entonces el área es $A_2 = A_1 + 104 = (x + 4)^2$.

$A_1 + 104 = (x + 4)^2$

$x^2 + 104 = (x + 4)^2 \Longrightarrow x^2 + 104 = x^2 + 8x + 16$; $8x = 88$; $x = 11$ cm

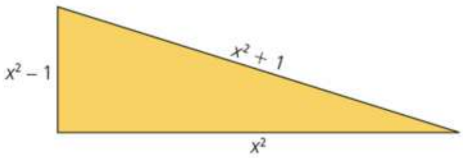
El perímetro inicial es:

$P = 4 \cdot 11 = 44$ cm

El área inicial es:

$A_1 = x^2 = 11^2 = 121$ cm^2

37 Halla los tres lados del siguiente triángulo rectángulo:



Se aplica el teorema de Pitágoras a los lados del triángulo rectángulo:

$(x^2)^2 + (x^2 - 1)^2 = (x^2 + 1)^2$

$x^4 + x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1$

$x^4 - 4x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$; $x^2 = 4$

Los lados miden:

$x^2 = 4$ cm

$x^2 - 1 = 3$ cm

$x^2 + 1 = 5$ cm

38 Calcula un número que, sumado al doble de su raíz cuadrada, dé 35.

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$x + 2\sqrt{x} = 35$

$x - 35 = -2\sqrt{x}$

$(x - 35)^2 = (-2\sqrt{x})^2$

$x^2 + 1\,225 - 70x = 4x$

$x^2 - 74x + 1\,225 = 0$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{74^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1225}}{2} = \frac{74 \pm 24}{2}$$

$x_1 = 49\ ;\ x_2 = 25$

Se comprueba que solo el valor $x_2 = 25$ cumple con la ecuación inicial.

39 El producto del cuadrado de un número por el anterior del cuadrado de dicho número es igual a 72. ¿De qué número se trata?

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$x^2 \cdot (x^2 - 1) = 72$

$x^4 - x^2 - 72 = 0$

Se hace el cambio de variable a $x^2 = t$

$t^2 - t - 72 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 72}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2}$$

$t_1 = 9; t_2 = -8 \Rightarrow$

$x_1 = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

No existen más soluciones reales.

Se comprueba que las dos soluciones encontradas, $x = 3$ y $x = -3$, son válidas.

40 El cociente entre dos números cuya diferencia es 10 es $\frac{5}{3}$. Determina el valor de los dos números.

Se plantean las ecuaciones y se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 10 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = y + 10 \xrightarrow{\text{se sustotuye en la 2.ª ecuación}} \\ 3x = 5y \end{array}\right\} 3x = 5y \Rightarrow 3 \cdot (y + 10) = 5y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + 30 = 5y \Rightarrow 2y = 30 \Rightarrow y = 15;\ x = 15 + 10 = 25$$

Los números son 25 y 15.

41 El área de un círculo es 36π cm^2. Halla la longitud de la circunferencia.

Se plantea la ecuación del área de un círculo y se halla el valor del radio de la circunferencia:

$A = \pi \cdot r^2 = 36\pi$

$\pi \cdot r^2 = 36\pi \Rightarrow r = \sqrt{36} = 6$ cm

La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$ cm

42 El producto de tres números consecutivos es 60. Halla dichos números.

Se plantean los tres números consecutivos, por ejemplo:

x, $x + 1$, $x + 2$

Se plantea la condición que cumplen y se resuelve la ecuación:

$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 60$

$x \cdot (x^2 + 3x + 2) = 60$

$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$

Se aplica la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 2 & -60 \\ 3 & & 3 & 18 & 60 \\ \hline & 1 & 6 & 20 & 0 \end{array}$$

$x = 3$

No existen más raíces reales pues en la ecuación restante, $x^2 + 6x + 20 = 0$, el discriminante es negativo.

La solución es, entonces, $x = 3$; $x + 1 = 4$; $x + 2 = 5$

43 La suma de la raíz cuadrada de un número más la raíz cuadrada de su cuádruple es 15. ¿Cuál es el número?

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$\sqrt{x} + \sqrt{4x} = 15$

$(\sqrt{x} + \sqrt{4x})^2 = 15^2$

$x + 4x + 2\sqrt{4x \cdot x} = 225$

$5x + 4x = 225$

$9x = 225 \Rightarrow x = 25$

Se comprueba que el valor $x = 25$ cumple con la ecuación inicial.

44 Las edades de una madre y su hija son 37 y 12 años, respectivamente. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de la madre exceda en más de 4 años al doble de la edad de la hija?

Se plantea la inecuación:

Edad de la madre dentro de x años: $37 + x$

Edad de la hija dentro de x años: $12 + x$

$(37 + x) > 2 \cdot (12 + x) + 4$

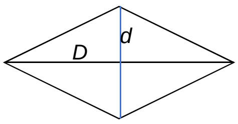
$37 + x > 24 + 2x + 4$

$37 > 28 + x \Longrightarrow x < 9$

Han de transcurrir menos de 9 años.

45 Calcula el menor valor que puede tomar la diagonal mayor de un rombo para que el área del rombo no sea inferior a 35 cm², sabiendo que sus diagonales difieren en 3 cm.

El área de un rombo es: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$



Se plantea el sistema, con esta asignación de datos:

$D = x$; $d = y$

El área del rombo no es menor que 35 cm²: $A = \dfrac{x \cdot y}{2} \geq 35$

Las diagonales difieren en 3 cm: $x - y = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x \cdot y}{2} \geq 35 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \cdot y \geq 70 \\ x = 3 + y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} (3 + y) \cdot y \geq 70 \\ x = 3 + y \end{array}\right\}$$

$$3y + y^2 \geq 70$$
$$y^2 + 3y - 70 \geq 0$$

Se resuelve la ecuación $y^2 + 3y - 70 = 0$ y se estudia si la solución cumple la inecuación:

$$y^2 + 3y - 70 = 0$$
$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 70}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2}$$
$$y_1 = 7; \ y_2 = -10$$

Se elige la solución coherente, $y = 7$ cm, con lo que $x = 3 + 7 = 10$ cm

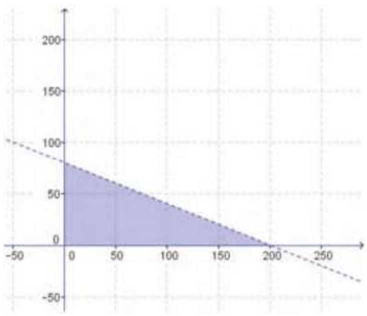
El menor valor que puede tomar la diagonal mayor es 10 cm.

46 Para reponer su tienda de material de natación, un empresario tiene que comprar gorros y gafas. Si el precio de cada gorro es de 2 € y el de cada gafa de 5 €, ¿cuántas unidades podrá adquirir de cada artículo si desea gastarse menos de 400 €?

Se plantea la inecuación, llamando x a los gorros e y a las gafas:

$2x + 5y < 400$

Se representa la recta $y = \dfrac{400 - 2x}{5}$ y se estudia qué semiplano es solución:



Los pares de soluciones son aquellos que están en el semiplano señalado, por ejemplo, $x = 50$ gafas; $y = 50$ gorros.

EVALUACIÓN

1 De las siguientes ecuaciones de segundo grado la que no tiene como soluciones –2 y 5 es:

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$

b. $5x \cdot (x + 1) - 4x^2 = 8x + 10$

c. $(x + 2)^2 = x + 10$

d. $x^2 + 3x = 2x \cdot (x - 5)$

Se sustituye el valor de las soluciones dadas en cada ecuación y se comprueba si cumple con ella:

a. $2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$

$5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0.$

b. $5 \cdot (-2) \cdot (-2 + 1) - 4 \cdot 2^2 = 8 \cdot (-2) + 10; -6 = -6$

$5 \cdot 5 \cdot (5 + 1) - 4 \cdot 5^2 = 8 \cdot 5 + 10; 50 = 50$

c. $(-2 + 2)^2 = -2 + 10; 0 \neq 8$

$(5 + 2)^2 = 5 + 10; 49 \neq 15$

d. $(-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 2 \cdot (-2) \cdot (-2 - 5); -2 \neq 28$

$5^2 + 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot (5 - 5); 40 \neq 0$

2 Las soluciones reales de la ecuación $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ son:

a. –3, –2, 2 y 3

b. –3 y 3

c. –2 y 2

d. No tiene.

Se hace un cambio de variable, $x^2 = t$ y se resuelve la ecuación de segundo grado $t^4 - 5t - 36 = 0$:

$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$ $\Rightarrow$ $t_1 = 9$; $t_2 = -4$. Solo tiene dos raíces reales:

$x = \pm\sqrt{t}$; $x_1 = \sqrt{t_1} = 3$; $x_2 = -\sqrt{t_1} = -3$

3 El número de soluciones de la siguiente ecuación es:

$$\boldsymbol{\sqrt{3x^2 + 4} - 7 = 2 \cdot (x - 3) + 1}$$

a. 2 b. 1 **c. 3** **d. Ninguna.**

$\sqrt{3x^2 + 4} - 7 = 2 \cdot (x - 3) + 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = 2 \cdot (x - 3) + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = 2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow \left(\sqrt{3x^2 + 4}\right)^2 = \left(2 \cdot (x + 1)\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 4 = 4 \cdot (x^2 + 2x + 1) \Rightarrow x^2 + 8x = 0$

$x \cdot (x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 8 = 0 \Rightarrow x_2 = -8$

Se comprueba si las dos soluciones cumplen la ecuación inicial:

$\sqrt{3 \cdot 0^2 + 4} - 7 = 2 \cdot (0 - 3) + 1; -5 = -5$

$\sqrt{3 \cdot (-8)^2 + 4} - 7 = 2 \cdot (-8 - 3) + 1; 7 \neq -21$

La solución $x_1 = 0$ es la única que cumple la ecuación inicial.

4 Las soluciones reales de la ecuación $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$ son:

a. –2, –1 y 1 **b. –1 y 1** c. –2, –1, 0 y 1 **d. –1, 0 y 1**

Se factoriza la ecuación:

$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x \cdot (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$

Se aplica la regla de Ruffini para seguir factorizando:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$x = 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & 2 \\ -1 & & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x = -1$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & & -2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

$x = -2$

Las raíces son $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -2$

5 La inecuación $4 \cdot (2x + 3) - 6x \leq 1 - (7 - 3x)$ tiene como solución:

a. $(-\infty, 18]$ **b. $(-\infty, 18)$** **c. $(18, +\infty)$** d. $[18, +\infty)$

$4 \cdot (2x + 3) - 6x \leq 1 - (7 - 3x)$

$8x + 12 - 6x \leq 1 - 7 + 3x$

$18 \leq x \Longrightarrow$ El intervalo solución es $[18, +\infty)$

6 La solución de la inecuación $2x^2 - x - 15 > 0$ es:

a. $\left(-\infty, \frac{-5}{2}\right) \cup (3, +\infty)$ **c.** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [3, \infty)$

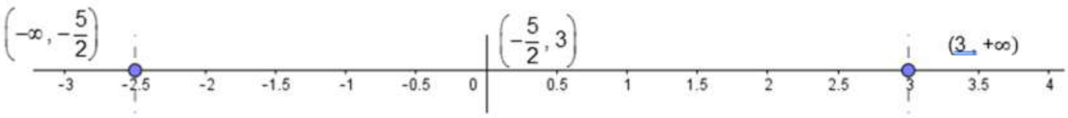
b. $\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ **d.** $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$

Se hallan las soluciones de la ecuación $2x^2 - x - 15 = 0$ y se estudia por intervalos qué soluciones cumplen la inecuación:

$2x^2 - x - 15 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4}$$

$x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{5}{2}$

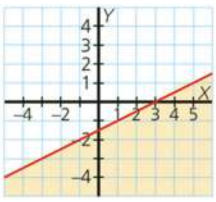


- En $\left(-\infty\ ,-\dfrac{5}{2}\right)$ la ecuación factorizada es > 0.
- En $\left(-\dfrac{5}{2}\ ,3\right)$ la ecuación factorizada es < 0.
- En (3 , +∞) la ecuación factorizada es > 0.

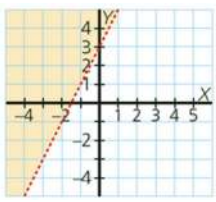
El intervalo solución es $\left(-\infty\ ,-\dfrac{5}{2}\right) \cup (3\ ,+\infty)$

7 De las siguientes gráficas, la que representa la solución de la inecuación $x - 2y > 3$ es:

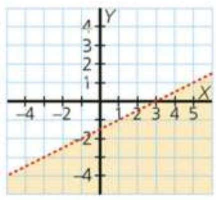
a.



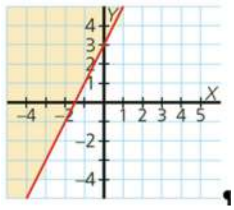
b.



c.



d.



La inecuación es $x - 2y - 3 > 0$

Se representa la recta $x - 2y - 3 = 0$, que es $y = \dfrac{x-3}{2}$

Se elige un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo el (0 , 0) para ver cuál de los dos semiplanos cumple con la inecuación. En este caso el punto elegido, (0 , 0) no es parte del plano solución, pues 0 – 2 · 0 – 3   0.