MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 2. Expresiones algebraicas. Polinomios

Unidad 2. Expresiones algebraicas. Polinomios

SOLUCIONES PÁG. 47

1 Sean los polinomios A (x) = $2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7$, B ($x$) = $-5x^3 + 3x^2 + x - 4$ y C (x) = $3x^4 - 2x^3 + x - 1$; realiza las siguientes operaciones y halla el grado del polinomio resultante:

a. A (x) + B (x) $= (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) + (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) =$

$= 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7 - 5x^3 + 3x^2 + x - 4 = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

b. A (x) – B (x) $= (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) - (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) =$

$= 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7 + 5x^3 - 3x^2 - x + 4 = 2x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2x + 11$

c. C (x) – A (x) + B (x) $= (3x^4 - 2x^3 + x - 1) - (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) +$
$+ (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1 - 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x - 7 - 5x^3 + 3x^2 + x - 4 =$
$= x^4 - 11x^3 + 4x^2 - x - 12$

d. A (x) · B (x) $= (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) =$
$= 2x^4 \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) + 4x^3 \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) - x^2 \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) +$
$+ 3x \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) + 7 \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) = -10x^7 + 6x^6 + 2x^5 - 8x^4 -$
$- 20x^6 + 12x^5 + 4x^4 - 16x^3 + 5x^5 - 3x^4 - x^3 + + 4x^2 - 15x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 12x - 35x^3 +$
$+ 21x^2 + 7x - 28 = -10x^7 - 14x^6 + 19x^5 - 22x^4 - 43x^3 + 28x^2 - 5x - 28$

e. 2 · B (x) · C (x) $= 2 \cdot (-5x^3 + 3x^2 + x - 4) \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) =$
$= (-10x^3 + 6x^2 + 2x - 8) \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) = -10x^3 \cdot (3x^4 - - 2x^3 + x - 1) +$
$+ 6x^2 \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) + 2x \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) - 8 \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) =$
$= -30x^7 + 20x^6 - 10x^4 + 10x^3 + 18x^6 - 12x^5 + 6x^3 - 6x^2 + 6x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 2x -$
$- 24x^4 + 16x^3 - 8x + 8 = -30x^7 + 38x^6 - 6x^5 - 38x^4 + 32x^3 - 4x^2 - 10x + 8$

f. A (x) – B (x) · C (x) $= (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) - [(-5x^3 + 3x^2 + x - 4) \cdot (3x^4 -$
$- 2x^3 + x - 1)] = (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) - [(-5x^3 + + 3x^2 + x - 4) \cdot (3x^4 - 2x^3 +$
$+ x - 1)] = (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) - [-5x^3 \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) + 3x^2 \cdot (3x^4 -$
$- 2x^3 + x - 1) + x \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1) - 4 \cdot (3x^4 - 2x^3 + x - 1)] =$

$= (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7) - [-15x^7 + 10x^6 - 5x^4 + 5x^3 + 9x^6 - 6x^5 + 3x^3 - 3x^2 +$
$+ 3x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 12x^4 + 8x^3 - 4x + 4] = 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7 - (-15x^7 +$
$+ 19x^6 - 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 - 2x^2 - 5x + 4) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7 + 15x^7 - 19x^6 +$
$+ 3x^5 + 19x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 5x - 4 = 15x^7 - 19x^6 + 3x^5 + 21x^4 - 12x^3 + + x^2 + 8x + 3$

2 Actividad resuelta.

3 Con los polinomios de la actividad resuelta anterior, comprueba que se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa para la multiplicación de polinomios. ¿Se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma?

- Propiedad conmutativa y distributiva:

A (x) · B (x) = B (x) · A (x)

$A(x) \cdot B(x) = (4x^2 - 3x + 6) \cdot (-5x^2 + x) =$

$= 4x^2 \cdot (-5x^2 + x) - 3x \cdot (-5x^2 + x) + 6 \cdot (-5x^2 + x) =$

$= -20x^4 + 4x^3 + 15x^3 - 3x^2 - 30x^2 + 6x =$

$= -20x^4 + 19x^3 - 33x^2 + 6x$

$B(x) \cdot A(x) = (-5x^2 + x) \cdot (4x^2 - 3x + 6) =$

$= -5x^2 \cdot (4x^2 - 3x + 6) + x \cdot (4x^2 - 3x + 6) =$

$= -20x^4 + 15x^3 - 30x^2 + 4x^3 - 3x^2 + 6x =$

$= -20x^4 + 19x^3 - 33x^2 + 6x$

- Propiedad asociativa y distributiva

$A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)] = [A(x) \cdot B(x)] \cdot C(x)$

$A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)] = (4x^2 - 3x + 6) \cdot [(-5x^2 + x) \cdot (3x^2 - 2)] =$

$= (4x^2 - 3x + 6) \cdot [-5x^2 \cdot (3x^2 - 2) + x \cdot (3x^2 - 2)] =$

$= (4x^2 - 3x + 6) \cdot [-15x^4 + 10x^2 + 3x^3 - 2x] =$

$= (4x^2 - 3x + 6) \cdot (-15x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x) =$

$= 4x^2 \cdot (-15x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x) - 3x \cdot (-15x^4 + 3x^3 + 10x^2 -$
$- 2x) + 6 \cdot (-15x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x) =$

$= -60x^6 + 12x^5 + 40x^4 - 8x^3 + 45x^5 - 9x^4 - 30x^3 + 6x^2 -$
$- 90x^4 + 18x^3 + 60x^2 - 12x = -60x^6 + 57x^5 - 59x^4 - 20x^3 +$
$+ 66x^2 - 12x$

$[A(x) \cdot B(x)] \cdot C(x) = [(4x^2 - 3x + 6) \cdot (-5x^2 + x)] \cdot (3x^2 - 2) =$

$= [4x^2 \cdot (-5x^2 + x) - 3x \cdot (-5x^2 + x) + 6 \cdot (-5x^2 + x)] \cdot (3x^2 - 2) =$

$= (-20x^4 + 4x^3 + 15x^3 - 3x^2 - 30x^2 + 6x) \cdot (3x^2 - 2) =$

$= (-20x^4 + 19x^3 - 33x^2 + 6x) \cdot (3x^2 - 2) =$

$= -20x^4 \cdot (3x^2 - 2) + 19x^3 \cdot (3x^2 - 2) - 33x^2 \cdot (3x^2 - 2) + 6x \cdot (3x^2 - 2) =$

$= -60x^6 + 40x^4 + 57x^5 - 38x^3 - 99x^4 + 66x^2 + 18x^3 - 12x =$

$= -60x^6 + 57x^5 - 59x^4 - 20x^3 + 66x^2 - 12x$

Sí, se cumple la propiedad distributiva de la suma respecto del producto.

4 Efectúa las siguientes operaciones y reduce el resultado todo lo posible:

a. $\mathbf{(3x^3 + 5x^2 - x) + (5x^2 - 2x) - (7x^3 - 3x)} =$

$= 3x^3 + 5x^2 - x + 5x^2 - 2x - 7x^3 + 3x = -4x^3 + 10x^2$

b. $\mathbf{(-4x^2 + 1) \cdot (3x + 2) + (10x^3 + 8x^2 - 3) =}$

$= -4x^2 \cdot (3x + 2) + 1 \cdot (3x + 2) + (10x^3 + 8x^2 - 3) =$

$= -12x^3 - 8x^2 + 3x + 2 + 10x^3 + 8x^2 - 3 = -2x^3 + 3x - 1$

c. $\mathbf{(5x - 3) \cdot (-x + 2) - (3x^2 + 4x) \cdot (x - 5) =}$

$= 5x \cdot (-x + 2) - 3 \cdot (-x + 2) - [3x^2 \cdot (x - 5) + 4x \cdot (x - 5)] =$

$= -5x^2 + 10x + 3x - 6 - (3x^3 - 15x^2 + 4x^2 - 20x) =$

$= -5x^2 + 10x + 3x - 6 - 3x^3 + 15x^2 - 4x^2 + 20x =$

$= -3x^3 + 6x^2 + 33x - 6$

d. $\mathbf{4x^2 \cdot (2x^3 - 6x^2 - 3x) + 2x^3 \cdot (-x^2 + 5x + 9) =}$

$= 8x^5 - 24x^4 - 12x^3 - 2x^5 + 10x^4 + 18x^3 = 6x^5 - 14x^4 + 6x^3$

5 Calcula utilizando las identidades notables.

a. $\mathbf{(x + 4)^2} = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

b. $\mathbf{(5x^2 - x)^2} = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot x + x^2 = 25x^4 - 10x^3 + x^2$

c. $\left(\frac{\mathbf{4x^2}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{3}}\right)^2 = \left(\frac{4x^2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4x^2}{5} \cdot \frac{2x}{3} + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{16x^4}{25} + \frac{16x^3}{15} + \frac{4x^2}{9}$

d. $\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} + \frac{25}{4}$

e. $\mathbf{(2x + 1) \cdot (2x - 1)} = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

f. $\left(\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{5}} - \mathbf{3}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{5}} + \mathbf{3}\right) = \left(\frac{2x}{5}\right)^2 - 3^2 = \frac{4x^2}{25} + 9$

6 Efectúa estas potencias:

a. $\mathbf{(5x^2 + 3x)^3} = (5x^2 + 3x)^2 \cdot (5x^2 + 3x) = (25x^4 + 30x^3 + 9x^2) \cdot (5x^2 + 3x) =$

$= 25x^4 \cdot (5x^2 + 3x) + 30x^3 \cdot (5x^2 + 3x) + 9x^2 \cdot (5x^2 + 3x) =$

$= 125x^6 + 75x^5 + 150x^5 + 90x^4 + 45x^4 + 27x^3 =$

$= 125x^6 + 225x^5 + 135x^4 + 27x^3$

b. $\mathbf{(x^2 - 2x + 3)^2} = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$= x^2 \cdot (x^2 - 2x + 3) - 2x \cdot (x^2 - 2x + 3) + 3 \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 9 =$

$= x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$

c. $\mathbf{(3x^4 + 5x^2 - 1)^3} = [(3x^4 + 5x^2 - 1) \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1)] \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) =$

$= [3x^4 \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) + 5x^2 \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) - (3x^4 + 5x^2 - 1)] \cdot \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) =$
$= [9x^8 + 15x^6 - 3x^4 + 15x^6 + 25x^4 - 5x^2 - 3x^4 - 5x^2 + 1] \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) =$

$= (9x^8 + 30x^6 - 19x^4 - 10x^2 + 1) \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) = 9x^8 \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) + 30x^6 \cdot$
$\cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) - 19x^4 \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) - 10x^2 \cdot (3x^4 + 5x^2 - 1) + 3x^4 + 5x^2 - 1 =$
$= 27x^{12} + 45x^{10} - 9x^8 + 90x^{10} + 150x^8 - 30x^6 + 57x^8 - 30x^6 + 95x^6 - 30x^6 - 19x^4 -$
$- 50x^4 + 3x^4 + 10x^2 + 5x^2 - 1 = 27x^{12} + 135x^{10} + 198x^8 + 35x^6 - 66x^4 + 15x^2 - 1$

7 Opera y reduce al máximo las siguientes operaciones con polinomios:

a. $\mathbf{(2x + 5)^2 + (2x + 5) \cdot (2x - 5)} =$

$= [(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2] + (2x + 5) \cdot (2x - 5) =$

$= 4x^2 + 20x + 25 + 4x^2 - 10x + 10x - 25 = 8x^2 + 20x$

b. $\mathbf{(x + 1) \cdot (x - 2)^2 - (x - 2) \cdot (x + 1)^2} =$

$= (x + 1) \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4) - (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) =$

$= (x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 4) - (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) =$

$= (x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4) - (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2) =$

$= x^3 - 3x^2 + 4 - x^3 + 3x + 2 = -3x^2 + 3x + 6$

c. $\mathbf{(3x - 2) \cdot (3x + 2) - 9 \cdot (x - 4)^2} =$

$= (3x)^2 - 2^2 - 9 \cdot (x^2 - 8x + 16) = 9x^2 - 4 - 9x^2 + 72x - 144 = 72x - 148$

8 Realiza las siguientes operaciones con polinomios y simplifica:

a. $\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 4x\right) + \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + x^2 - x\right) =$

$$= \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + x^2 - x = 2x^4 - \frac{17}{6}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 5x$$

b. $\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{14}x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{5}{4}$$

c. $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) =$

$$= \frac{1}{3}x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) + \frac{2}{5}x \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{2}{10}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}x^4 + \frac{7}{30}x^3 + \frac{3}{10}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{3}{2}$$

9 Realiza estas operaciones y reduce el resultado:

a. $\frac{\mathbf{5\cdot(x-4)}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{(x+1)^2}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{2x\cdot(3x-1)}}{\mathbf{5}}=$

$$=\frac{5x-20}{3}+\frac{x^2+2x+1}{4}-\frac{6x^2-2x}{5}=$$

$$=\frac{20\cdot(5x-20)+15\cdot(x^2+2x+1)-12\cdot(6x^2-2x)}{60}=$$

$$=\frac{100x-400+15x^2+30x+15-72x^2+24x)}{60}=\frac{-57x^2+154x-5}{60}=$$

$$=-\frac{19}{20}x^2+\frac{77}{30}x-\frac{77}{12}$$

b. $\frac{\mathbf{(x^2-3)\cdot(x+2)}}{\mathbf{12}}-\frac{\mathbf{(3x^2-1)^2}}{\mathbf{4}}=$

$$=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{12}-\frac{9x^4-6x^2+1}{4}=\frac{x^3+2x^2-3x-6-27x^4+18x^2-3}{12}=$$

$$=\frac{-27x^4+x^3+20x^2-3x-9}{12}=-\frac{9}{4}x^4+\frac{1}{12}x^3+\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$$

c. $\frac{\mathbf{4x-2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{7x^2\cdot(x-3)}}{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{(2x+5)\cdot(3x^2-1)}}{\mathbf{15}}=$

$$=\frac{(4x-2)\cdot 7x^2\cdot(x-3)}{18}-\frac{6x^3-2x+15x^2-5}{15}=$$

$$=\frac{7x^2\cdot\left(4x^2-14x+6\right)}{18}-\frac{6x^3+15x^2-2x-5}{15}=$$

$$=\frac{28x^4-98x^3+42x^2}{18}-\frac{6x^3+15x^2-2x-5}{15}=$$

$$=\frac{14}{9}x^4-\frac{49}{9}x^3+\frac{7}{3}x^2-\frac{2}{5}x^3-x^2+\frac{2}{15}x+\frac{1}{3}=$$

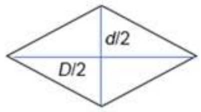
$$=\frac{14}{9}x^4-\frac{263}{45}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{15}x+\frac{1}{3}$$

d. $\frac{\mathbf{3x^2-5x}}{\mathbf{2}}+\mathbf{(x-4)\cdot(x+4)}=$

$$=\frac{3x^2-5x}{2}+x^2-4^2=\frac{3x^2-5x}{2}+\frac{2x^2-32}{2}=\frac{5x^2-5x-32}{2}=\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{2}x-16$$

10 Halla la expresión algebraica del lado y del área de un rombo cuyas diagonales miden (2*x* + 3) y (2*x* – 3).

Se halla el lado del rombo mediante el teorema de Pitágoras:



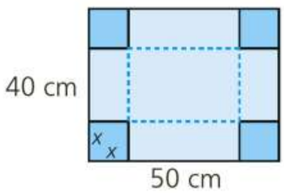
$$l^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4}}$$

$$l = \sqrt{\frac{(2x+3)^2 + (2x - 3)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 + 12x + 9 + 4x^2 - 12x + 9}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8x^2 + 18}{4}} = \sqrt{2x^2 + \frac{9}{2}}$$

Se halla el área del rombo: $A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{(2x + 3)\cdot(2x - 3)}{2} = \frac{4x^2 - 9}{2} = 2x^2 - \frac{9}{2}$

11 Con una cartulina rectangular de 40 cm × 50 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas. Escribe la expresión algebraica de la superficie de la caja en función del lado del cuadrado.



Se calcula el área de la caja restando al área total las esquinas que se van a recortar:

$A\ (x) = 40 \cdot 50 - 4 \cdot (x \cdot x) = -4x^2 + 2\,000$

12 Busca información sobre el triángulo de Tartaglia. ¿Qué relación tiene con las potencias $(a + b)^n$? Utilízalo para calcular las cinco primeras potencias de (*x* + 2). ¿Con qué otro nombre es también conocido?

El triángulo de Tartaglia es una representación de los coeficientes de las potencias del polinomio $(a + b)^n$ desde $n = 0$. En cada nivel del triángulo se presentan dichos coeficientes ordenados de forma que cada coeficiente en el triángulo es la suma de los dos que están situados inmediatamente encima de él.

La relación del triángulo de Tartaglia con los coeficientes de las potencias de un polinomio es la siguiente:

$(a + b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

Para calcular $(x + 2)^5$ usaremos los coeficientes 1, 5, 10, 10, 5, 1:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$(x + 2)^5 = x^5 + x^4 \cdot 2 + x^3 \cdot 2^2 + x^2 \cdot 2^3 + x \cdot 2^4 + 2^5 = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$

SOLUCIONES PÁG. 49

13 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a. $\mathbf{(10x^3 - x^2 - 23x + 5) : (5x - 3)}$

$$\begin{array}{l|l}
10x^3 - x^2 - 23x + 5 & 5x - 3 \\ \cline{2-2}
-10x^3 + 6x^2 & 2x^2 - x - 4 \\ \cline{1-1}
0 + 5x^2 - 23x + 5 & \\
-5x^2 + 3x & \\ \cline{1-1}
0 - 20x + 5 & \\
+20x - 12 & \\ \cline{1-1}
-7 &
\end{array}$$

b. $\mathbf{(-3x^4 + 11x^3 - 25x^2 + 17x - 7) : (x^2 - 3x + 6)}$

$$\begin{array}{l|l}
-3x^4 + 11x^3 - 25x^2 + 17x - 7 & x^2 - 3x + 6 \\ \cline{2-2}
+3x^4 - 9x^3 + 18x^2 & -3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-1}
0 + 2x^3 - 7x^2 + 17x - 7 & \\
-2x^3 + 6x^2 - 12x & \\ \cline{1-1}
0 - x^2 + 5x - 7 & \\
+x^2 - 3x + 6 & \\ \cline{1-1}
2x - 1 &
\end{array}$$

c. $\mathbf{(8x^5 - 22x^3 - 4x^2 + 15x + 6) : (2x^2 - 3)}$

$$\begin{array}{l|l}
8x^5 - 22x^3 - 4x^2 + 15x + 6 & 2x^2 - 3 \\ \cline{2-2}
-8x^5 + 12x^3 & 4x^3 - 5x - 2 \\ \cline{1-1}
0 - 10x^3 - 4x^2 + 15x + 6 & \\
+10x^3 - 15x & \\ \cline{1-1}
0 - 4x^2 + 6 & \\
4x^2 - 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

d. $\mathbf{(-6x^4 + 27x^3 - 11x^2 + 2x - 3) : (-2x^2 + x)}$

$$
\begin{array}{l|l}
-6x^4 + 27x^3 - 11x^2 + 2x - 3 & -2x^2 + x \\ \cline{2-2}
\underline{+6x^4 - 3x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} & 3x^2 - 12x - \frac{1}{2} \\
0 + 24x^3 - 11x^2 + 2x - 3 & \\
\underline{\quad - 24x^3 + 12x^2 \qquad\qquad} & \\
\quad 0 \quad + x^2 + 2x - 3 & \\
\underline{\qquad\quad - x^2 + \frac{1}{2}x \qquad} & \\
\qquad\qquad 0 + \frac{5}{2}x - 3 &
\end{array}
$$

14 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a. $\mathbf{(5x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4) : (x - 2)}$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & -2 & 1 & -3 & -4 \\
+2 & & 10 & 16 & 34 & 62 \\ \hline
 & 5 & 8 & 17 & 31 & 58
\end{array}
$$

$(5x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4) : (x - 2) = 5x^3 + 8x^2 + 17x + 31;\ r(x) = 58$

b. $\mathbf{(3x^3 - 7x^2 - 5) : (x - 1)}$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -7 & 0 & -5 \\
1 & & 3 & -4 & -4 \\ \hline
 & 3 & -4 & -4 & -9
\end{array}
$$

$(3x^3 - 7x^2 - 5) : (x - 1) = 3x^2 - 4x - 4;\ r(x) = -9$

c. $\mathbf{(-4x^5 + 2x^3 + x - 6) : (x + 3)}$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & -4 & 0 & +2 & 0 & 1 & -6 \\
-3 & & 12 & -36 & 102 & -306 & 915 \\ \hline
 & -4 & 12 & -34 & 102 & -305 & 909
\end{array}
$$

$(-4x^5 + 2x^3 + x - 6) : (x + 3) = -4x^4 + 12x^3 - 34x^2 + 102x - 305;\ r(x) = 909$

d. $\mathbf{(x^5 - 3x^4 + x^2 + 1) : (x - 4)}$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & +1 \\
4 & & 4 & 4 & 16 & 68 & 272 \\ \hline
 & 1 & 1 & 4 & 17 & 68 & 273
\end{array}
$$

$(x^5 - 3x^4 + x^2 + 1) : (x - 4) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 17x + 68;\ r(x) = 273$

SOLUCIONES PÁG. 51

15 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados:

a. P (x) = $4x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$

P (4) = $4 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 57$

b. P (x) = $5x^3 + 2x^2 - 1$ para $x = -1$

P (–1) = $5 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 1 = -4$

c. P (x) = $-x^4 + 5x^2 + 7$ para $x = -2$

P (–2) = $-(-2)^4 + 5 \cdot (-2)^2 + 7 = 11$

16 Calcula para los siguientes valores, el valor numérico del polinomio:

A (x) = $2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 1$

a. $x = -4$

A (–4) = $2 \cdot (-4)^4 - (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) + 1 = 665$

b. $x = -\frac{1}{2}$

$$A\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

c. $x = -2$

A (–2) = $2 \cdot (-2)^4 - (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = 65$

d. $x = -\frac{2}{3}$

$$A\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 =$$

$$= 2\cdot\frac{16}{81} + \frac{8}{27} + \frac{20}{9} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{425}{81}$$

e. $x = 0$

A (0) = $2 \cdot (0)^4 - (0)^3 + 5 \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) + 1 = 1$

f. $x = \frac{5}{3}$

$$A\left(\frac{5}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^4 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + 1 =$$

$$= 2\cdot\frac{625}{81} - \frac{125}{27} + \frac{125}{9} - \frac{10}{3} + 1 = \frac{1811}{81}$$

g. $\boldsymbol{x = 3}$

A (3) = $2 \cdot (3)^4 - (3)^3 + 5 \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) + 1 = 175$

h. $\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$

$$A\left(\frac{1}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 1 =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{256} - \frac{1}{64} + \frac{5}{16} - \frac{2}{4} + 1 = \frac{103}{128}$$

17 El valor numérico de un polinomio, P ($\boldsymbol{x}$), en $\boldsymbol{x = 3}$ es 5, y el cociente de su división entre ($\boldsymbol{x - 3}$) es $\boldsymbol{5x^2 - 2x + 1}$. Averigua de qué polinomio se trata.

Según el teorema del resto, r (a) = P (a), luego si P (3) = 5 $\Rightarrow$ r (x) = 5, es decir, P (x) = $(x - 3) \cdot$ c (x) + 5 = $(x - 3) \cdot (5x^2 - 2x + 1) + 5 \Rightarrow$

P (x) = $5x^3 - 2x^2 + x - 15x^2 + 6x - 3 + 5 = 5x^3 - 17x^2 + 7x + 2$

18 Halla el resto de las siguientes divisiones, aplicando el teorema del resto:

Si se aplica el teorema del resto, se observa que el resto es igual al valor numérico del polinomio.

a. $\boldsymbol{(3x^4 - 5x^2 - x + 1) : (x + 4)}$

P (–4) = $3 \cdot (-4)^4 - 5 \cdot (-4)^2 - (-4) + 1 = 693$

b. $\boldsymbol{(-3x^5 + 2x^3 - 11x) : (x + 3)}$

P (–3) = $-3 \cdot (-3)^5 + 2 \cdot (-3)^3 - 11 \cdot (-3) = 708$

c. $\boldsymbol{(x^3 + 2x^2 - 8) : (x - 5)}$

P (5) = $5^3 + 2 \cdot 5^2 - 8 = 167$

d. $\boldsymbol{\left(6x^2 - 5x - 4\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)}$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{6}{4} - \frac{5}{2} - 4 = -5$$

19 Aplica el teorema del resto para hallar P (–6), P (–1) y P (2) para los siguientes polinomios:

a. $\boldsymbol{P(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x}$

P (–6) = $-(-6)^3 - 3 \cdot (-6)^2 + 4 \cdot (-6) = 84$

P (–1) = $-(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -6$

P (2) = $-(2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 4 \cdot (2) = -12$

b. $\mathbf{P\ (\mathit{x}) = \mathit{x}^2 - 3\mathit{x} + 9}$

$P\ (x) = x^2 - 3x + 9$

$P\ (-6) = (-6)^2 - 3 \cdot (-6) + 9 = 63$

$P\ (-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 9 = 13$

$P\ (2) = (2)^2 - 3 \cdot (2) + 9 = 7$

c. $\mathbf{P\ (\mathit{x}) = \frac{1}{6}\mathit{x}^3 - \frac{2}{3}\mathit{x}^2 + \mathit{x} - \frac{5}{2}}$

$$P\ (-6) = \frac{1}{6}(-6)^3 - \frac{2}{3}(-6)^2 + (-6) - \frac{5}{2} = -36 - 24 - 6 - \frac{5}{2} = -\frac{137}{2}$$

$$P\ (-1) = \frac{1}{6}(-1)^3 - \frac{2}{3}(-1)^2 + (-1) - \frac{5}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - 1 - \frac{5}{2} = -\frac{13}{3}$$

$$P\ (2) = \frac{1}{6}(2)^3 - \frac{2}{3} \cdot (2)^2 + (2) - \frac{5}{2} = \frac{8}{6} - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{6}$$

20 Calcula el resto de la división, utilizando la regla de Ruffini y el teorema del resto, y comprueba que obtienes el mismo resultado.

$$\mathbf{(-2\mathit{x}^4 + 4\mathit{x}^3 - 6\mathit{x}^2 - 5\mathit{x} + 3) : (\mathit{x} - 2)}$$

- Mediante la regla de Ruffini:

	–2	4	–6	–5	3
2		–4	0	–12	–34
	–2	0	–6	–17	–31

$(-2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 5x + 3) : (x - 2) = -2x^3 - 6x - 17;\ r\ (x) = -31$

- Mediante el teorema del resto:

$P\ (2) = -2 \cdot (2)^4 + 4 \cdot (2)^3 - 6 \cdot (2)^2 - 5 \cdot (2) + 3 = -31;\ r\ (x) = -31$

21 Calcula el resto de las operaciones sin efectuar la división.

a. $\mathbf{(\mathit{x}^6 - 2\mathit{x}^5 + 3\mathit{x}^4 - 5\mathit{x}^3 + 4\mathit{x}^2) : (\mathit{x} + 1)}$

$P\ (-1) = (-1)^6 - 2 \cdot (-1)^5 + 3 \cdot (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 = 15$

b. $\mathbf{\left(\frac{3}{5}\mathit{x}^3 - \frac{1}{10}\mathit{x} + \frac{1}{15}\right) : \left(\mathit{x} + \frac{2}{5}\right)}$

$$P\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 - \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{15} = -\frac{24}{625} + \frac{2}{50} + \frac{1}{15} = \frac{128}{1875}$$

c. $\mathbf{(5\mathit{x}^2 - 2\mathit{x} + 1) : (\mathit{x} - 5)}$

$P\ (5) = 5 \cdot (5)^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 116$

22 Halla el resto de la división (x^{100} – 1) : (x + 1) por el método más adecuado.

Se aplica el teorema del resto: $P(-1) = (-1)^{100} - 1 = 0$

23 Determina el valor que tiene que tener *m* para que la división ($-3x^3 - 10x^2 + 6x + m$) : : (x + 4) sea exacta.

Se aplica el teorema del resto, de modo que sea cero:

$P(-4) = -3 \cdot (-4)^3 - 10 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) + m = 0 \Longrightarrow 192 - 160 - 24 + m = 0 \Longrightarrow m = -8$

24 Actividad resuelta.

25 Encuentra el valor de *a* y *b* para que el polinomio P (x) = $x^3 + 2x^2 + ax + b$ cumpla que P (–1) = 8 y P (3) = 40.

$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 8 \Longrightarrow -a + b = 7$

$P(3) = (3)^3 + 2 \cdot (3)^2 + a \cdot (3) + b = 40 \Longrightarrow 3a + b = -5$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -a+b= 7 \\ 3a+b = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b= -7 \\ \underline{3a + b = -5} \end{array}\right\}$$

$$4a = -12 \Rightarrow a = -3; b = 4$$

26 ¿Existe algún valor de *m* entero para el que el resto de la división ($-2x^3 + mx^2$ – – $4x$ + 1) : (x – 3) sea 4?

Se aplica el teorema del resto:

$P(3) = 4 \Longrightarrow -2 \cdot (3)^3 + m \cdot (3)^2 - 4 \cdot (3) + 1 = 4$

$\Longrightarrow -54 + 9m - 12 + 1 = 4 \Longrightarrow 9m = -69 \Longrightarrow m = \frac{69}{9} = \frac{23}{3}$

El valor de *m* no es entero, luego no existe tal valor.

27 Formad grupos y calculad el valor numérico para x = 0, 1, 2, …, 10, del polinomio de Shaw-Basho:

$$\frac{1}{120} \cdot \left(42x^5 - 305x^4 + 1\,100x^3 - 895x^2 + 1\,018x + 480\right)$$

Restad a cada resultado el anterior y repetid este proceso seis veces. ¿Qué números se obtienen? ¿Qué números se obtendrán si se repite de nuevo el proceso?

Para x = 0: $\frac{1}{120} \cdot (0 + 480) = 4$

Para x = 1: $\frac{1}{120}\cdot\left(42-305+1\,100-895+1\,018+480\right)=12$

Para x = 2: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 2^5-305\cdot 2^4+1\,100\cdot 2^3-895\cdot 2^2+1\,018\cdot 2+480\right)=35$

Para x = 3: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 3^5-305\cdot 3^4+1\,100\cdot 3^3-895\cdot 3^2+1\,018\cdot 3+480\right)=89$

Para x = 4: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 4^5-305\cdot 4^4+1\,100\cdot 4^3-895\cdot 4^2+1\,018\cdot 4+480\right)=213$

Para x = 5: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 5^5-305\cdot 5^4+1\,100\cdot 5^3-895\cdot 5^2+1\,018\cdot 5+480\right)=511$

Para x = 6: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 6^5-305\cdot 6^4+1\,100\cdot 6^3-895\cdot 6^2+1\,018\cdot 6+480\right)=1194$

Para x = 7: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 7^5-305\cdot 7^4+1\,100\cdot 7^3-895\cdot 7^2+1\,018\cdot 7+480\right)=2622$

Para x = 8: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 8^5-305\cdot 8^4+1\,100\cdot 8^3-895\cdot 8^2+1\,018\cdot 8+480\right)=5346$

Para x = 9: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 9^5-305\cdot 9^4+1\,100\cdot 9^3-895\cdot 9^2+1\,018\cdot 9+480\right)=10150$

Para x = 10: $\frac{1}{120}\cdot\left(42\cdot 10^5-305\cdot 10^4+1\,100\cdot 10^3-895\cdot 10^2+1\,018\cdot 10+480\right)=18093$

Es decir, la serie de valores numéricos es:

4, 12, 35, 89, 213, 511, 1 194, 2 622, 5 346, 10 150, 18 093

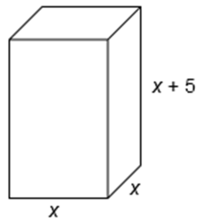
Paso 1: 4, 12, 35, 89, 213, 511, 1 194, 2 622, 5 346, 10 150, 18 093
Paso 2: 8, 23, 54, 124, 298, 683, 1 428, 2 724, 4 084, 7 943
Paso 3: 15, 31, 70, 174, 385, 745, 1 296, 2 080, 3 139
Paso 4: 16, 39, 104, 211, 360, 551, 784, 1 059
Paso 5: 23, 65, 107, 149, 191, 233, 275
Paso 6: 42, 42, 42, 42, 42, 42
Paso 7: 0, 0, 0, 0, 0

Si se repite el proceso, siempre se van a obtener secuencias de ceros, es decir, la serie se anula.

Una anécdota: este polinomio se ha utilizado en algunas series de televisión, como parte de la trama, entre las más destacadas, la serie *Perdidos*.

28 Halla la expresión algebraica del área y del volumen de un prisma cuadrangular cuya arista básica mide x cm y que tiene por altura (x + 5) cm. Si x = 4 cm, ¿cuál es el valor del área y el volumen del prisma?

El área del prisma cuadrangular es:



$A = A_{\text{bases}} + A_{\text{lateral}}$

$A(x) = 2x^2 + 4x \cdot (x + 5) = 2x^2 + 4x^2 + 20x = 6x^2 + 20x$

$A(4) = 6 \cdot 4^2 + 20 \cdot 4 = 176 \text{ cm}^2$

El volumen del prisma cuadrangular es:

$V = A_{\text{base}} \cdot h$

$V(x) = x^2 \cdot (x + 5) = x^3 + 5x^2$

$V(4) = 4^3 + 5 \cdot 4^2 = 144 \text{ cm}^3$

29 Un móvil lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que tiene por ecuación $\boldsymbol{e(t) = \frac{1}{4}t^2 + 3t + 9}$

a. ¿Qué espacio habrá recorrido al cabo de 10 s?

$$e(10) = \frac{1}{4} \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 9 = 64 \text{ m}$$

b. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 289 m?

$$298 = \frac{1}{4}t^2 + 3t + 9 \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 + 3t - 280 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 280}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-3 \pm 17}{\frac{1}{2}} = -6 \pm 34$$

De las dos soluciones posibles se toma t = 28 s

SOLUCIONES PÁG. 53

30 Indica cuál de los números –4, –2, 5 y 6, no puede ser raíz del polinomio P (x) = = $3x^4 - 5x^3 + 2x - 12$.

Para que un número entero, a, distinto de cero, sea raíz de un polinomio con coeficientes enteros y con término independiente distinto de cero, es necesario que sea un divisor de su término independiente.

Por ese motivo 5 no puede ser raíz del polinomio, al no ser divisor de –12.

31 Comprueba si los números –3, 0, 1 y $\frac{2}{5}$ son raíces del polinomio A (x) = $5x^3$ + + $8x^2$ – $19x$ + 6.

A (–3) =5 · $(-3)^3$ + 8 · $(-3)^2$ –19 · (–3) + 6 = –135 + 72 + 57 + 6 = 0

A (0) =5 · $(0)^3$ + 8 · $(0)^2$ –19 · (0) + 6 = 6

A (1) =5 · $(1)^3$ + 8 · $(1)^2$ –19 · (1) + 6 = 5 + 8 – 19 + 6 = 0

$$A\left(\frac{2}{5}\right) = 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 19\cdot\left(\frac{2}{5}\right) + 6 = \frac{8}{25} + \frac{32}{25} - \frac{38}{5} + 6 = 0$$

Son raíces –3, 1 y $\frac{2}{5}$

32 ¿Cuántas raíces tiene el polinomio A (x) = $3x^3$ + $4x^2$ – $9x$ – 10? ¿Son todas enteras? Halla todas sus raíces enteras.

- Según el teorema fundamental del álgebra un polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces:

  Como el polinomio A (x) es de grado 3, debe tener 3 raíces reales.

- Las raíces enteras del polinomio tienen que ser divisores de su término independiente, luego las raíces enteras del polinomio A (x) deben ser divisores de –10. Las raíces posibles son, entonces $D(-10) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5\}$. Se aplica el teorema del resto para ver cuál de estas posibles raíces lo son realmente:

$$\begin{array}{r|rrr|l} & 3 & 4 & -9 & -10 \\ 1 & & 3 & 7 & -2 \\ \hline & 3 & 7 & -2 & -12 \;\; P(1) = -12 \end{array}$$

Luego x = 1 no es raíz de A (x)

$$\begin{array}{r|rrr|l} & 3 & 4 & -9 & -10 \\ -1 & & -3 & -1 & 10 \\ \hline & 3 & 1 & -10 & 0 \;\; P(-1) = 0 \end{array}$$

Luego x = –1 es raíz de A (x)

$$\begin{array}{r|rrr|l} & 3 & 4 & -9 & -10 \\ 2 & & 6 & 20 & -22 \\ \hline & 3 & 10 & -11 & -32 \;\; P(2) = -32 \end{array}$$

Luego x = 2 no es raíz de A (x)

$$\begin{array}{r|rrr|l} & 3 & 4 & -9 & -10 \\ -2 & & -6 & 4 & 10 \\ \hline & 3 & -2 & -5 & 0 \;\; P(0) = 16 \end{array}$$

Luego x = –2 es raíz de A (x)

	3	4	–9	–10	
5		15	95	430	
	3	19	86	420	P (5) = 430

Luego $x = 5$ no es raíz de A (x)

	3	4	–9	–10	
–5		–15	55	–230	
	3	–11	46	–240	P (5) = –240

Luego $x = –5$ no es raíz de A (x)

Es decir, las raíces enteras de A (x) = $3x^3 + 4x^2 – 9x – 10$ son $x = –1$ y $x = –2$

33 Determina las raíces enteras de los siguientes polinomios:

Las raíces enteras del polinomio tienen que ser divisores de su término independiente:

a. A (x) = $x^2 + 4x + 3$

A (x) = $x^2 + 4x + 3$ tiene como posibles raíces enteras $D(3) = \{\pm 1, \pm 3\}$.

A (1) = $1^2 + 4 \cdot (1) + 3 = 8 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de A (x)

A (–1) = $(–1)^2 + 4 \cdot (–1) + 3 = 0 \Rightarrow x = –1$ es raíz de A (x)

A (3) = $3^2 + 4 \cdot (3) + 3 = 24 \Rightarrow x = 3$ no es raíz de A (x)

A (–3) = $(–3)^2 + 4 \cdot (–3) + 3 = 0 \Rightarrow x = –3$ es raíz de A (x)

b. B (x) = $x^3 – x^2 – 9x + 9$

B (x) = $x^3 – x^2 – 9x + 9$ tiene como posibles raíces enteras $D(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$.

B (1) = $1^3 – (1)^2 – 9 \cdot (1) + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz de B (x)

B (–1) = $(–1)^3 – (–1)^2 – 9 \cdot (–1) + 9 = 16 \Rightarrow x = –1$ no es raíz de B (x)

B (3) = $3^3 – (3)^2 – 9 \cdot (3) + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ es raíz de B (x)

B (–3) = $(–3)^3 – (–3)^2 – 9 \cdot (–3) + 9 = 0 \Rightarrow x = –3$ es raíz de B (x)

B (9) = $(9)^3 – (9)^2 – 9 \cdot (9) + 9 = 576 \Rightarrow x = 9$ no es raíz de B (x)

B (–9) = $(–9)^3 – (–9)^2 – 9 \cdot (–9) + 9 = –720 \Rightarrow x = –9$ no es raíz de B (x)

c. C (x) = $2x^3 – x^2 – 8x + 4$

C (x) = $2x^3 – x^2 – 8x + 4$ tiene como posibles raíces enteras $D(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

C (1) = $2 \cdot (1)^3 – (1)^2 – 8 \cdot (1) + 4 = –3 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de C (x)

C (–1) = $2 \cdot (–1)^3 – (–1)^2 – 8 \cdot (–1) + 4 = 9 \Rightarrow x = –1$ no es raíz de C (x)

C (2) = $2 \cdot (2)^3 – (2)^2 – 8 \cdot (2) + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz de C (x)

C (2) = $2 \cdot (–2)^3 – (–2)^2 – 8 \cdot (–2) + 4 = 0 \Rightarrow x = –2$ es raíz de C (x)

C (4) = 2 · $(4)^3$ – $(4)^2$ – 8 · (4) + 4 = 84 $\Rightarrow$ x = 4 no es raíz de C (x)

C (–4) = 2 · $(-4)^3$ – $(-4)^2$ – 8 · (–4) + 4 = –108 $\Rightarrow$ x = –4 no es raíz de C (x)

d. D (x) = 4x^3 + 8x^2 – x – 2

D (x) = 4x^3 + 8x^2 – x – 2 tiene como posibles raíces enteras $D(4)=\{\pm 1, \pm 2\}$.

D (1) = 4 · $(1)^3$ + 8 · $(1)^2$ – (1) – 2 = 9 $\Rightarrow$ x = 1 no es raíz de D (x)

D (–1) = 4 · $(-1)^3$ + 8 · $(-1)^2$ – (–1) – 2 = 3 $\Rightarrow$ x = –1 no es raíz de D (x)

D (2) = 4 · $(2)^3$ + 8 · $(2)^2$ – (2) – 2 = 60 $\Rightarrow$ x = 2 no es raíz de D (x)

D (–2) = 4 · $(-2)^3$ + 8 · $(-2)^2$ – (–2) – 2 = 0 $\Rightarrow$ x = –2 es raíz de D (x)

34 Obtén un polinomio, P (x), de grado 3 que tenga como raíces:

Según el teorema del factor, un polinomio A (x) se puede expresar como el producto de sus factores. El polinomio de grado 3 es el producto de los tres factores del polinomio.

a. x = 1 y x = –1

(x – 1) · (x + 1) · P (x) = (x^2 – 1) · P (x), donde P(x) es un polinomio de grado 1.

b. x = –4 y x = 0

(x + 4) · (x) · Q (x) = (x^2 + 4x) · Q (x), siendo Q (x) un polinomio de grado 1.

c. x = –5, x = –3 y x = 5

(x + 5) · (x + 3) · (x – 5) = (x^2 – 25) · (x + 3) = x^3 + 3x^2 – 25x – 75

d. x = 0, x = 1 y x = 2

x · (x – 1) · (x – 2) = x^3 – 3x^2 + 2x

35 Averigua si los siguientes binomios son factores del polinomio P (x) = x^4 – x^3 – – 16x^2 + 4x + 48:

P(x) tiene como factor (x – a) si x = a es una raíz del polinomio P (x).

a. x + 3

Si el factor es x + 3, la raíz es x = –3 $\Rightarrow$

P (–3) = $(-3)^4$ – $(-3)^3$ –16 · $(-3)^2$ + 4 · (–3) + 48 = 81 + 27 – 144 –12 + 48 = 0

x + 3 es un factor de P (x).

b. x + 2

Si el factor es x + 2, la raíz es x = –2 $\Rightarrow$

P (–2) = $(-2)^4$ – $(-2)^3$ –16 · $(-2)^2$ + 4 · (–2) + 48 = 16 + 8 – 64 – 8 + 48 = 0

x + 2 es un factor de P (x).

c. $\boldsymbol{x + 4}$

Si el factor es $x + 4$, la raíz es $x = -4 \Longrightarrow$

$P(-4) = (-4)^4 - (-4)^3 - 16 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 48 = 256 + 64 - 64 - 16 + 48 = 288$

$x + 4$ no es un factor de P (x).

d. $\boldsymbol{x - 4}$

Si el factor es $x - 4$, la raíz es $x = 4 \Longrightarrow$

$P(4) = 4^4 - 4^3 - 16 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 48 = 256 - 64 - 256 + 16 + 48 = 0$

$x - 4$ es un factor de P (x).

36 Halla el valor de *k* en los siguientes casos:

a. $\boldsymbol{x + 2}$ **es factor de A (*x*) =** $\boldsymbol{x^3 - 7x + k}$

Se aplica Ruffini al polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & k \\ -2 & & -2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{k+6} \end{array}$$

Luego $k + 6 = 0 \Longrightarrow k = -6$

b. $\boldsymbol{x = 6}$ **es una raíz de C (*x*) =** $\boldsymbol{x^3 + kx^2 - 6x}$

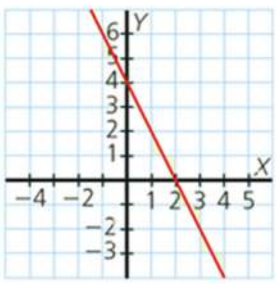
Se aplica la regla de Ruffini al polinomio:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & k & -6 \\ 6 & & 6 & 6k+36 \\ \hline & 1 & k+6 & \boxed{6k+30} \end{array}$$

Luego $6k + 30 = 0 \Longrightarrow k = -5$

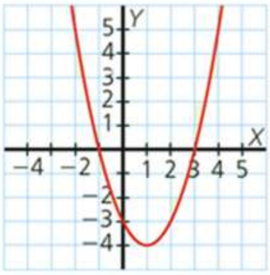
37 Di cuáles son las raíces de los polinomios representados a continuación:

a.



Las raíces de un polinomio son los valores de las abscisas de los puntos de corte con el eje X de la función $y = P(x)$. Así, la raíz es $x = 2$

b.



Las raíces de un polinomio son los valores de las abscisas de los puntos de corte con el eje *X* de la función *y* = P (*x*). Como corta por dos puntos al eje de abscisas, tiene dos raíces: $x = -1$; $x = 3$

SOLUCIONES PÁG. 55

38 Factoriza los siguientes polinomios, indicando sus raíces reales:

a. $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

	1	6	11	6
–1		–1	–5	–6
	1	5	6	0

	1	5	6
–2		–2	–6
	1	3	0

Los factores son:

$(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \Longrightarrow$ raíces: $x = -1$; $x = -3$, $x = -2$

b. $\boldsymbol{x^3 - 13x + 12}$

	1	0	–13	12
1		1	1	–12
	1	1	–12	0
3		3	12	
	1	4	0	

Los factores son:

$(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4) \Longrightarrow$ raíces: $x = 1$, $x = 3$, $x = -4$

c. $\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + x - 5}$

	1	–5	1	–5
5		5	0	5
	1	0	1	0

Los factores son:

$(x - 5) \cdot (x^2 + 1) \Longrightarrow$ raíz: $x = 5$

d. $\boldsymbol{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$

	1	–5	6
2		2	–6
	1	–3	0

Los factores son:

$x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \Longrightarrow$ raíces: $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$

e. $\boldsymbol{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}$

	1	2	–3	–4	4
1		1	3	0	–4
	1	3	0	–4	0
1		1	4	4	
	1	4	4	0	
–2		–2	–4		
	1	2	0		

Los factores son:

$(x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2 \Longrightarrow$ raíces: $x = 1$, $x = -2$

f. $\boldsymbol{2x^3 - 5x^2 - 8x + 20}$

	2	–5	–8	20
2		4	–2	–20
	2	–1	–10	0
–2		–4	10	
	2	–5	0	

Los factores son:

$(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 5) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 5/2) \Rightarrow$ raíces: $x = 2$, $x = -2$, $x = \frac{5}{2}$

g. $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

	1	–3	3	–1
1		1	–2	1
	1	–2	1	0
1		1	–1	
	1	–1	0	

Los factores son:

$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) = (x - 1)^3 \Rightarrow$ raíces: $x = 1$

h. $\boldsymbol{x^3 - 4x - 15}$

	1	0	–4	–15
3		3	9	15
	1	3	5	0

Los factores son:

$(x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 5) \Rightarrow$ raíces reales: $x = 3$

i. $\boldsymbol{6x^3 - 13x^2 + 4x + 3}$

	6	–13	4	3
1		6	–7	–3
	6	–7	–3	0

$(x - 1) \cdot (6x^2 - 7x - 3)$

Se calculan las raíces del polinomio de grado 2:

$$\frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 11}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{1}{3}$$

Los factores son: $(x-1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$ (x –1) $\Rightarrow$ raíces: $x = 1$, $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}$

j. $\boldsymbol{3x^4 - 7x^3 - 18x^2 - 8x}$

$3x^4 - 7x^3 - 18x^2 - 8x = x \cdot (3x^3 - 7x^2 - 18x - 8)$

	3	–7	–18	–8
–1		–3	10	8
	3	–10	–8	0

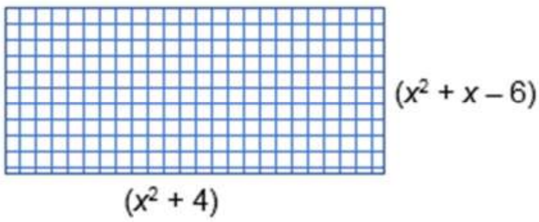
	3	–10	–8
4		12	8
	3	2	0

Los factores son:

$$(x+1)\cdot(x-4)\cdot(3x+2)=(x+1)\cdot(x-4)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow$$

raíces: $x = -1$, $x = 4$, $x=-\frac{2}{3}$

39 Se dispone de una tela rectangular cuyas dimensiones son $(x^2 + 4) \cdot (x^2 + x - 6)$ cm. Se desea cortar en cuadraditos de $(x - 2)$ cm sin que sobre tela. ¿Se puede saber si esto es posible sin necesidad de cortar la tela previamente? Justifica tu respuesta.



Para que sea posible, $(x + 2)$ debería ser un divisor común de los polinomios $(x^2 + 4)$ y $(x^2 + x - 6)$, pero:

	1	0	4
2		2	4
	1	2	$\boxed{8}$

$(x^2 + 4)$ no es divisible entre $(x - 2)$, luego no es posible.

40 Teniendo en cuenta las identidades notables, descompón en factores los siguientes polinomios:

a. $\mathbf{9x^2 - 6x + 1} = (3x - 1)^2$

b. $\mathbf{x^2 - 7} = \left(x+\sqrt{7}\right)\cdot\left(x-\sqrt{7}\right)$

c. $\mathbf{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2$

41 Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de estos polinomios:

a. **P (x) = $x^2 \cdot (x + 1)^2$ y Q (x) = $x^3 \cdot (x + 1)$**

Los polinomios están factorizados, luego se calculan directamente el m.c.m y el m.c.d.:

m.c.m. [P (x), Q (x)] = $x^3 \cdot (x + 1)^2$

m.c.d. [P (x), Q (x)] = $x^2 \cdot (x + 1)$

b. **P (x) = $x^3 + 6x^2 + 9x$ y Q (x) = $x^3 + 4x^2 + 3x$**

Se factorizan los polinomios:

P (x) = $x^3 + 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) = x \cdot (x + 3)^2$

Q (x) = $x^3 + 4x^2 + 3x = x \cdot (x^2 + 4x + 3) = x \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)$

Se calculan el m.c.m. y el m.c.d.:

m.c.m. [P (x), Q (x)] = $x \cdot (x + 3)^2 \cdot (x + 1)$

m.c.d. [P (x), Q (x)] = $x \cdot (x + 3)$

c. **P (x) = $x^3 + 2x^2 – 7x + 4$ y Q (x) = $x^3 – 6x^2 + 9x – 4$**

Se factorizan los polinomios:

P (x) = $x^3 + 2x^2 – 7x + 4 = (x – 1)^2 \cdot (x + 4)$

Q (x) = $x^3 – 6x^2 + 9x – 4 = (x – 1)^2 \cdot (x – 4)$

Se calculan el m.c.m. y el m.c.d.:

m.c.m. [P (x), Q (x)] = $(x – 1)^2 \cdot (x + 4) \cdot (x – 4)$

m.c.d. [P (x), Q (x)] = $(x – 1)^2$

42 Descompón los siguientes polinomios realizando una doble extracción de factor común:

a. $xz + xt – yz – yt = x \cdot (z + t) – y \cdot (z + t) = (x – y) \cdot (z + t)$

b. $xy + 2x – 3y – 6 = x \cdot (y + 2) – 3 \cdot (y + 2) = (x – 3) \cdot (y – 2)$

c. $x^2 + 2xy – xz – 2yz = x \cdot (x – z) – 2xy – 2yz = x \cdot (x – z) – 2y \cdot (x – z) =$

$= (x – z) \cdot (x –2y)$

d. $3x^2 – xy – 12x + 4y = x \cdot (3x – y) – 4 \cdot (3x – y) = (3x – y) \cdot (x – 4)$

SOLUCIONES PÁG. 57

43 Comprueba si los pares de fracciones son equivalentes:

a. $\mathbf{\dfrac{x+2}{x-1}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x-2}}$

Sí son equivalentes:

$$\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x+2)^2}{x^2+x-2}\Rightarrow\begin{cases}(x+2)\cdot\left(x^2+x-2\right)=(x-1)\cdot(x+2)^2\\ x^3+x^2-2x+2x^2+2x-4=(x-1)\cdot\left(x^2+4x+4\right)\\ x^3+3x^2-4=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4\\ x^3+3x^2-4=x^3+3x^2-4\end{cases}$$

b. $\mathbf{\dfrac{3}{x-5}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{x+1}{x^2-5x}}$

No son equivalentes:

$$\frac{3}{x-5}=\frac{x+1}{x^2-5x}\Rightarrow\begin{cases}3\cdot\left(x^2-5x\right)=(x-5)\cdot(x+1)\\ 3x^2-15x=x^2+1-5x-5\\ 3x^2-15x\neq x^2-5x-4\end{cases}$$

c. $\mathbf{\dfrac{x^2}{x^3-1}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{2x+1}{2x^2+3x}}$

No son equivalentes:

$$\frac{x^2}{x^3-1}=\frac{2x+1}{2x^2+3x}\Rightarrow\begin{cases}x^2\cdot\left(2x^2+3x\right)=\left(x^3-1\right)\cdot(2x+1)\\ 2x^4+3x^3\neq 2x^4+x^3-2x-1\end{cases}$$

d. $\mathbf{\dfrac{x+1}{x+4}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+8x+16}}$

Sí son equivalentes:

$$\frac{x+1}{x+4}=\frac{x^2+5x+4}{x^2+8x+16}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)\cdot\left(x^2+8x+16\right)=(x+4)\cdot\left(x^2+5x+4\right)\\ x^3+8x^2+16x+x^2+8x+16=x^3+5x^2+4x+4x^2+20x+16\\ x^3+9x^2+24x+16=x^3+9x^2+24x+16\end{cases}$$

44 Halla el polinomio P (x) para que las fracciones propuestas sean equivalentes.

a. $\dfrac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{x^2-4x+4}}=\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x-2}}$

$$\frac{P(x)}{x^2-4x+4}=\frac{(x+3)}{x-2}\Rightarrow\begin{cases}P(x)\cdot(x-2)=\left(x^2-4x+4\right)\cdot(x+3)\\ P(x)\cdot(x-2)=x^3+3x^2-4x^2-12x+4x+12\\ P(x)\cdot(x-2)=x^3-x^2-8x+12\\ P(x)=\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x-2}=x^2+x-6\end{cases}$$

b. $\dfrac{\mathbf{x^3+4x^2}}{\mathbf{x^2+5x+4}}=\dfrac{\mathbf{7x^2}}{\mathbf{P\ (x)}}$

$$\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+4}=\frac{7x^2}{P\ (x)}\Rightarrow\begin{cases}P\ (x)\cdot\left(x^3+4x^2\right)=\left(x^2+5x+4\right)\cdot 7x^2\\ P\ (x)\cdot\left(x^3+4x^2\right)=7x^4+35x^3+28x^2\\ P\ (x)=\dfrac{7x^4+35x^3+28x^2}{x^3+4x^2}=\dfrac{x^2}{x^2}\cdot\dfrac{7x^2+35x+28}{x+4}\\ P\ (x)=\dfrac{7x^2+35x+28}{x+4}=7x+7\end{cases}$$

45 Encuentra una fracción algebraica equivalente a $\dfrac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{5x^2}}$ que tenga:

a. Como numerador un polinomio de grado 3.

Respuesta abierta. Por ejemplo, se multiplica por x^2 al mumerador y al denominador:

$$\frac{2x+1}{5x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\frac{2x^3+x^2}{5x^4}\Rightarrow\frac{2x+1}{5x^2}=\frac{2x^3+x^2}{5x^4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(2x+1)\cdot 5x^4=(2x^3+x^2)\cdot 5x^2\Rightarrow 10x^5+5x^4=10x^5+5x^4$$

b. Como denominador un polinomio de grado 5.

Respuesta abierta. Por ejemplo, se multiplica por x^3 al numerador y al denominador:

$$\frac{2x+1}{5x^2}\cdot\frac{x^3}{x^3}=\frac{2x^4+x^3}{5x^5}\Rightarrow\frac{2x+1}{5x^2}=\frac{2x^4+x^3}{5x^5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(2x+1)\cdot 5x^5=(2x^4+x^3)\cdot 5x^2\Rightarrow 10x^6+5x^5=10x^6+5x^5$$

46 Calcula el valor numérico de las fracciones algebraicas $\frac{3x^2}{x-4}$ y $\frac{6x^3-9x^2}{2x^3-11x+12}$ para x = –2. A partir del resultado obtenido, ¿podrías asegurar que las fracciones son equivalentes?

$\frac{3x^2}{x-4}$ para $x = -2$ es $\frac{3\cdot(-2)^2}{-2-4} = -\frac{12}{6} = -2$

$\frac{6x^3-9x^2}{2x^3-11x+12}$ para $x = -2$ es $\frac{6\cdot(-2)^3-9\cdot(-2)^2}{2\cdot(-2)^3-11\cdot(-2)+12} = -\frac{84}{18} = -\frac{14}{3}$

Según su definición, estas fracciones no son equivalentes, ya que no toman el mismo valor en $x = -2$.

47 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x-2}{x-3}$

b. $\frac{5\cdot(x+1)^4}{(x+1)^3} = 5\cdot(x+1)$

c. $\frac{(x+4)^2\cdot(x-4)^2}{x\cdot(x+4)^2} = \frac{(x-4)^2}{x}$

d. $\frac{2x^4\cdot(x-1)^4\cdot(x-5)}{2x^3\cdot(x-5)^3\cdot(x-1)} = \frac{x\cdot(x-1)^3}{(x-5)^2}$

48 Descompón estas fracciones algebraicas aplicando las identidades notables y simplifica:

a. $\frac{x^2-25}{x+5} = \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{x+5} = x-5$

b. $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

c. $\frac{x^2-6x+9}{x\cdot(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{x\cdot(x-3)} = \frac{x-3}{x}$

d. $\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x^3-4x^2+4x} = \frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x\cdot(x^2-4x+4)} = \frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)^2} = \frac{x-3}{x\cdot(x-2)}$

e. $\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}}{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{8}\boldsymbol{x}} = \dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{2\cdot(x-2)}{2\cdot(2x-4)} = \dfrac{x-2}{2\cdot(x-2)} = \dfrac{1}{2}$

f. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\mathbf{16}} = \dfrac{x^2-4}{(x^2+4)\cdot(x^2-4)} = \dfrac{1}{x^2+4}$

49 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^3} = \dfrac{1}{x+1}$

b. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{8}\boldsymbol{x}+\mathbf{12}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{18}} = \dfrac{(x-2)\cdot(x^2+x+6)}{(x+3)\cdot(x^2+x-6)} = \dfrac{(x-2)\cdot(x^2+x+6)}{(x+3)\cdot(x^2+x-6)} =$

$= \dfrac{(x-2)^2\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x+3)\cdot(x-2)} = \dfrac{x-2}{x+3}$

c. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} = \dfrac{(x-1)\cdot(x^2+1)}{x-1} = x^2+1$

d. $\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\mathbf{12}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{18}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{18}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{27}\boldsymbol{x}} = \dfrac{x^2}{x}\cdot\dfrac{2x^2-12x+18}{3x^2-18x+27} = x\cdot\dfrac{(x-3)\cdot(2x-6)}{(x-3)\cdot(3x-9)} =$

$= \dfrac{2}{3}x\cdot\dfrac{(x-3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-3)} = \dfrac{2}{3}x$

e. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{16}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{20}\boldsymbol{x}} = \dfrac{x^2}{x}\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-x-20} = \dfrac{x\cdot(x+4)\cdot(x-4)}{(x-5)\cdot(x+4)} = \dfrac{x\cdot(x-4)}{x-5}$

f. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{(x-5)\cdot(x+1)}{(x-5)\cdot(x+1)} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{(x+5)\cdot(x-1)}{(x-5)\cdot(x+1)}$

La fracción es irreductible.

g. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x}+\mathbf{2}} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+4)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+1)} = \dfrac{x^2+4}{x-2}$

h. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}} = \dfrac{x^4}{x}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{x^3\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}$

50 Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son dos fracciones algebraicas equivalentes, demuestra que las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{P(x)+R(x)}{Q(x)+S(x)}$ son también equivalentes. ¿Qué condición se debe cumplir para que las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$ sean equivalentes?

Deberían cumplir la propiedad de los productos cruzados:

$P(x) \cdot [Q(x) + S(x)] = Q(x) \cdot [P(x) + R(x)]$

Luego:

$P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot P(x) + Q(x) \cdot R(x)$

Eliminando $P(x) \cdot Q(x)$ de los dos miembros de la igualdad:

$P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$

Y esta igualdad es cierta, pues las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes.

SOLUCIONES PÁG. 59

51 Reduce a común denominador estas fracciones:

a. $\frac{4x}{x-3}$ **y** $\frac{x+2}{(x-3)^2}$

m.c.m. $\left[(x-3), (x-3)^2\right] = (x-3)^2$

$$\frac{4x}{x-3} = \frac{4x\cdot(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2-12x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$$

b. $\frac{x-5}{x^2+2x}$ **y** $\frac{2}{x^3+3x^2}$

m.c.m. $\left[(x^2+2x), (x^3+3x^2)\right]$ = m.c.m. $\left[x\cdot(x+2), x^2(x+3)\right] =$

$= x^2\cdot(x+2)\cdot(x+3)$

$$\frac{x-5}{x^2+2x} = \frac{x-5}{x\cdot(x+2)} = \frac{x}{x^2}\cdot\frac{x-5}{(x+2)}\cdot\frac{(x+3)}{(x+3)} = \frac{x\cdot(x-5)\cdot(x+3)}{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$$

$$\frac{2}{x^3+3x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{x+3} = \frac{2\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$$

c. $\dfrac{-x+4}{x+1}$ **y** $\dfrac{5}{x^2-2x-3}$

m.c.m. $\left[(x+1),(x^2-2x-3)\right]$ = m.c.m. $\left[(x+1),(x+1)\cdot(x-3)\right]=(x+1)\cdot(x-3)$

$$\frac{-x+4}{x+1}=\frac{-x+4}{x+1}\cdot\frac{x-3}{x-3}=\frac{(-x+4)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-3)}$$

$$\frac{5}{x^2-2x-3}=\frac{5}{(x+1)\cdot(x-3)}$$

d. $\dfrac{4x+1}{x^2-3x}$ **y** $\dfrac{3}{x^2+3x+2}$

m.c.m. $\left[(x^2-3x),(x^2+3x+2)\right]$ = m.c.m. $\left[x\cdot(x-3),(x+1)\cdot(x+2)\right]=$

$=x\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

$$\frac{4x+1}{x^2-3x}=\frac{(4x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}$$

$$\frac{3}{x^2+3x+2}=\frac{3}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{3\cdot x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}$$

52 Realiza las siguientes sumas y restas:

a. $\dfrac{2x}{(x+1)^2}+\dfrac{3x-4}{x+1}=\dfrac{2x+(3x-4)\cdot(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x+\left(3x^2+3x-4x-4\right)}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{3x^2+x-4}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}$$

b. $\dfrac{x+1}{x^2-5x}-\dfrac{3x}{x^2-25}$

$$\frac{x+1}{x^2-5x}-\frac{3x}{x^2-25}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x+1}{x-5}-\frac{3x}{(x-5)\cdot(x+5)}$$

m.c.m.$\left[(x\cdot(x-5)),(x-5)\cdot(x+5)\right]=x\cdot(x-5)\cdot(x+5)$

$$\frac{x+1}{x^2-5x}-\frac{3x}{x^2-25}=\frac{(x+1)\cdot(x+5)-3x\cdot x}{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}=\frac{x^2+5x+x+5-3x^2}{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}=$$

$$=\frac{-2x^2+6x+5}{x^3-25x}$$

c. $\mathbf{\dfrac{5-2x}{x^3}-\dfrac{7}{x^2-x}}$

$$\frac{5-2x}{x^3}-\frac{7}{x^2-x}=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{5-2x}{x^2}-\frac{7}{x-1}\right)$$

$$\text{m.c.m.}\left[\left(x^2\right),\left(x-1\right)\right]=x^2\cdot\left(x-1\right)$$

$$\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{5-2x}{x^2}-\frac{7}{x-1}\right)=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\left(5-2x\right)\cdot\left(x-1\right)-7x^2}{x^2\cdot\left(x-1\right)}\right)=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\left(5x-5-2x^2+2x\right)-7x^2}{x^2\cdot\left(x-1\right)}\right)=$$

$$=\frac{-9x^2+7x-5}{x^4-x^3}$$

d. $\mathbf{\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{4x+1}{x^2}+\dfrac{3-5x}{x^3}}$

$$\text{m.c.m.}\left[x,x^2,x^3\right]=x^3$$

$$\frac{\left(x-2\right)\cdot x^2-\left(4x+1\right)\cdot x+\left(3-5x\right)}{x^3}=\frac{\left(x^3-2x^2\right)-\left(4x^2+x\right)+\left(3-5x\right)}{x^3}=$$

$$\frac{x^3-2x^2-4x^2-x+3-5x}{x^3}=\frac{x^3-6x^2-6x+3}{x^3}$$

e. $\mathbf{\dfrac{6x}{x+2}+\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{x-2}}$

$$\text{m.c.m.}\left[x+2,x^2-4,x-2\right]=\text{m.c.m.}\left[x+2,\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right),x-2\right]=\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)$$

$$\frac{6x}{x+2}+\frac{5}{x^2-4}-\frac{3-x}{x-2}=\frac{6x\cdot\left(x-2\right)+5-\left(3-x\right)\cdot\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)}=$$

$$=\frac{6x^2-12x+5-\left(3x+6-x^2-2x\right)}{\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)}=\frac{6x^2+x^2-12x+2x-3x+5-6}{\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)}=$$

$$=\frac{7x^2-13x-1}{\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)}=\frac{7x^2-13x-1}{x^2-4}$$

53 Efectúa estas multiplicaciones y divisiones.

a. $\dfrac{-3x}{x-2}\cdot\dfrac{5x-10}{x^2}=\dfrac{-3x\cdot(5x-10)}{x^2\cdot(x-2)\cdot}=\dfrac{-3\cdot 5\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}=\dfrac{-15}{x}$

b. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x}:\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{(x-4)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}:\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{(x-4)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}\cdot\dfrac{x+1}{x-4}=$

$=\dfrac{(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-3)\cdot(x-4)}=\dfrac{x+1}{x}$

c. $\dfrac{x^2-4x}{x+3}\cdot\dfrac{2x}{x-4}:\dfrac{x}{(x+3)^2}=\dfrac{x\cdot(x-4)\cdot 2x}{(x+3)\cdot(x-4)}:\dfrac{x}{(x+3)^2}=$

$=\dfrac{2x^2}{(x+3)}\cdot\dfrac{(x+3)^2}{x}=\dfrac{2x^2\cdot(x+3)}{x}=2x\cdot(x+3)=2x^2+6x$

d. $\dfrac{x+1}{x^2+25}:\dfrac{4}{x+5}:\dfrac{2x^2+2x}{x-5}=\dfrac{x+1}{x^2-25}\cdot\dfrac{x+5}{4}:\dfrac{2x^2+2x}{x-5}=$

$=\dfrac{x+1}{x^2-25}\cdot\dfrac{x+5}{4}\cdot\dfrac{x-5}{2x^2+2x}=\dfrac{(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{(x^2-25)\cdot 4\cdot 2x\cdot(x+1)}=\dfrac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x^2-25)\cdot 8x}=$

$=\dfrac{(x^2-25)}{(x^2-25)\cdot 8x}=\dfrac{1}{8x}$

54 Opera y simplifica todo lo posible.

a. $\dfrac{x+1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x}\cdot\dfrac{5x}{x^2-4x+4}=\dfrac{x+1}{x\cdot(x-2)}+\dfrac{(x-2)\cdot 5x}{x\cdot(x-2)^2}=\dfrac{x+1}{x\cdot(x-2)}+\dfrac{5}{(x-2)}$

$\text{m.c.m.}[x,x-2]=x\cdot(x-2)\Rightarrow$

$\dfrac{x+1}{x\cdot(x-2)}+\dfrac{5}{(x-2)}=\dfrac{(x+1)+5x}{x\cdot(x-2)}=\dfrac{6x+1}{x^2-2x}$

b. $\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x}=\left(\dfrac{x}{(x+1)\cdot(x-1)}-\dfrac{x+3}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}\cdot\dfrac{x-1}{x}=$

$=\dfrac{x-(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot x}=\dfrac{x-(x^2-x+3x-3)}{(x+1)\cdot x}=\dfrac{x-x^2+x-3x+3}{x^2+x}=\dfrac{-x^2-3x+3}{x^2+x}$

c. $\left(\dfrac{-4}{x-5}+\dfrac{x+2}{x^2}\right):\left(\dfrac{9x}{x-5}-3x\right)=\dfrac{-4x^2+(x+2)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot x^2}:\dfrac{9x-3x\cdot(x-5)}{x-5}=$

$=\dfrac{-4x^2+x^2-5x+2x-10}{(x-5)\cdot x^2}\cdot\dfrac{(x-5)}{9x-3x\cdot(x-5)}=\dfrac{-3x^2-3x-10}{x^2}\cdot\dfrac{1}{9x-3x\cdot(x-5)}=$

$\dfrac{-3x^2-3x-10}{9x^3-3x^4+15x^3}=\dfrac{-3x^2-3x-10}{-3x^4+24x^3}=\dfrac{3x^2+3x+10}{3x^4-24x^3}$

d. $\left(\dfrac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x^3}}-\dfrac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{x^2}}+\dfrac{\mathbf{3+x}}{\mathbf{x}}\right):\dfrac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x^3}}$

$$\text{m.c.m.}\left[x^3,x^2,x\right]=x^3$$

$$\left(\frac{2x+1}{x^3}-\frac{x-4}{x^2}+\frac{3+x}{x}\right):\frac{x+2}{x^3}=\frac{(2x+1)-(x-4)\cdot x+(3+x)x^2}{x^3}:\frac{x+2}{x^3}=$$

$$\frac{(2x+1)-(x-4)\cdot x+(3+x)\cdot x^2}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x+2}=\frac{(2x+1)-(x-4)\cdot x+(3+x)\cdot x^2}{x+2}=$$

$$\frac{2x+1-x^2+4x+3x^2+x^3}{x+2}=\frac{x^3+2x^2+6x+1}{x+2}$$

e. $\left(\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{2x}}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x-4}}:\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^2}}-\dfrac{\mathbf{5x}}{\mathbf{x^2-4x}}\right)=\dfrac{(x+3)^2}{4x^2}+\left(\dfrac{x^3}{2x-8}-\dfrac{5x}{x\cdot(x-4)}\right)=$

$$=\frac{(x+3)^2}{4x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{(x-4)}-\frac{5}{(x-4)}=$$

$$\text{m.c.m.}\left[4x^2,2\cdot(x-4),x-4\right]=4\cdot x^2\cdot(x-4)$$

$$\frac{(x+3)^2}{4x^2}+\frac{x^3}{2x-8}-\frac{5}{(x-4)}=\frac{(x+3)^2\cdot(x-4)+x^3\cdot 2x^2-5\cdot 4x^2}{4x^2\cdot(x-4)}=$$

$$=\frac{(x^2+6x+9)\cdot(x-4)+2x^5-20x^2}{4x^3-16x^2}=\frac{x^3-4x^2+6x^2-24x+9x-36+2x^5-20x^2}{4x^3-16x^2}$$

$$=\frac{2x^5+x^3-18x^2-15x-36}{4x^3-16x^2}$$

SOLUCIONES PÁG. 61

1 ¿Cumple la suma de polinomios las propiedades conmutativa y asociativa? Justifica tu respuesta con un ejemplo.

Sí, cumple las dos propiedades.

Si dos polinomios, A (x) = x – 2 y B (x) = x^2 + 2 se suman, resulta:

A (x) + B (x) = x – 2 + x^2 + 2 = x^2 + x + 4

B (x) + A (x) = x^2 + 2 + x – 2 = x^2 + x + 4

Se cumple la propiedad conmutativa.

Si C (x) = –x^2 – 2 y se realizan estas operaciones:

A (x) + [B (x) + C (x)] = x – 2 + [x^2 + 2 – x^2 – 2] = x – 2 + [0] = x – 2

[A (x) + B (x)] + C (x) = [x – 2 + x^2 + 2] – x^2 – 2 =

= x – 2 + x^2 + 2 – x^2 – 2 = x – 2

2 **Demuestra con un ejemplo que la multiplicación de polinomios cumple la propiedad distributiva respecto de la suma de polinomios.**

Sí, la cumple. Ver actividad 3 de la página 47.

3 **En una división, ¿cómo ha de ser el divisor para que se pueda aplicar la regla de Ruffini?**

Debe ser un binomio de la forma (x – a) o (x + a)

4 **Si el resto de la división de un polinomio entre x – 2 es 7, ¿cuál es el valor numérico del polinomio para x = 2? ¿Existe algún teorema que justifique esto?**

P (2) = 7. El teorema del resto, según el cual el resto de la división del polinomio P (x) entre un binomio de la forma (x – a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor $x = a$, es decir, r = P (a).

5 **Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías decir si x = 0 es raíz de un polinomio sin término independiente? Justifica tu respuesta.**

Sí lo es, pues se puede sacar factor común a x, luego: $x = (x – 0)$ es un factor y 0 una raíz.

6 **¿Cuántas raíces puede tener un polinomio de grado 4? ¿Son todas enteras?**

Puede tener 4 raíces. No todas tienen por qué ser enteras, depende del polinomio.

7 **¿Qué condición debe cumplir un número, *a*, para ser una raíz de un polinomio?**

Debe ser divisor del término independiente.

8 **Según el teorema del factor, ¿cuál es la relación entre las raíces y los factores de un polinomio?**

Si x = a es raíz de un polinomio, entonces x – a es un factor, y viceversa.

9 **¿En qué consiste la factorización de polinomios?**

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios (factores) irreducibles.

10 **¿Cuándo es irreducible un polinomio? Escribe un polinomio de grado 2 que sea irreducible.**

Un polinomio es irreducible cuando no tiene ningún divisor de grado inferior al suyo. Respuesta abierta.

11 Describe el procedimiento para hallar el m.c.m. y el m.c.d. de varios polinomios.

Para calcular el m.c.m. y el m.c.d. de los polinomios P (x) y Q (x), se factorizan los dos polinomios.

Para hallarlos:

- m.c.m. [P (x), Q (x)]: se toman los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
- m.c.d. [P (x), Q (x)]: se toman los factores comunes elevados al menor exponente.

12 Define el concepto de fracción algebraica.

Una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$

13 ¿Cuándo son equivalentes dos fracciones?

Dos fracciones son equivalentes si toman el mismo valor numérico para cualquier valor de sus variables que no anule el denominador.

14 ¿En qué consiste la simplificación de fracciones algebraicas? Describe el proceso que se sigue para simplificar una fracción.

Simplificación: si dividimos el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica obtenida es equivalente a ella. Para simplificar una fracción algebraica se siguen estos pasos:

- Se factorizan el numerador y el denominador.
- Se eliminan todos los factores comunes.

15 Define fracción inversa de una fracción algebraica.

La inversa de la fracción, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es la fracción, $\frac{Q(x)}{P(x)}$, es decir, la fracción que resulta de intercambiar el numerador y el denominador de la fracción.

16 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Gloster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 62 – REPASO FINAL

SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

1 **Realiza las operaciones propuestas con los siguientes polinomios. Comprueba tus resultados con Wiris.**

$$\mathbf{A\ (x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1}$$

$$\mathbf{B\ (x) = 6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5}$$

$$\mathbf{C\ (x) = -4x^4 + 3x^2 + 5x - 2}$$

a. **A (x) + B (x)** $= 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 + 6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5 =$

$= 8x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 6$

b. **A (x) – B (x)** $= 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - (6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5) =$

$= 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x - 5 = -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x - 4$

c. **A (x) + C (x)** $= 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - 4x^4 + 3x^2 + 5x - 2 = -2x^4 + x^3 + 6x - 1$

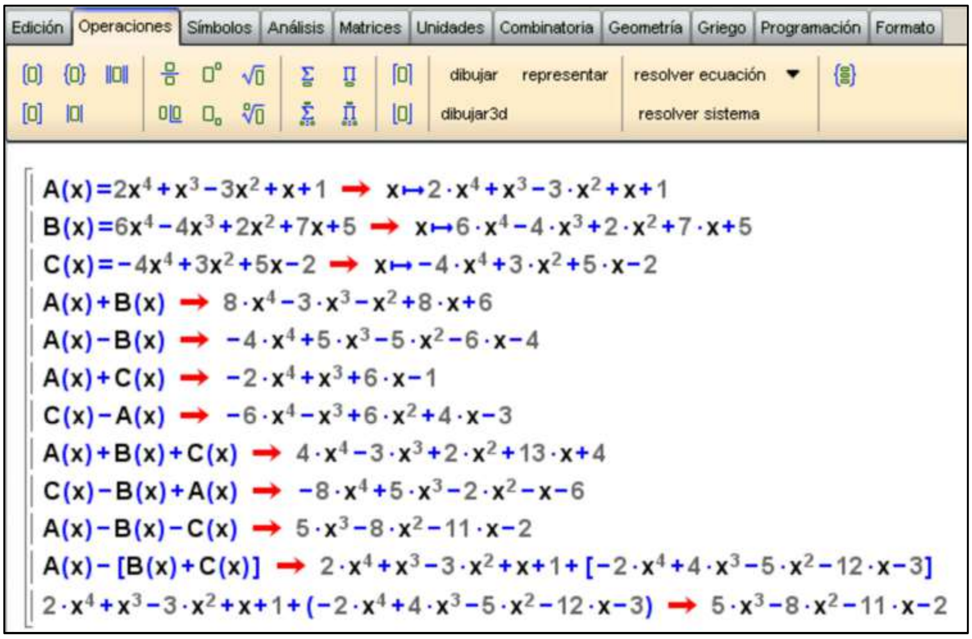
d. **C (x) – A (x)** $= -4x^4 + 3x^2 + 5x - 2 - (2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1) = -4x^4 + 3x^2 + 5x - 2 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 1 = -6x^4 - x^3 + 6x^2 + 4x - 3$

e. **A (x) + B (x) + C (x)** $= 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 + 6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5 - 4x^4 + 3x^2 + 5x - 2 = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 13x + 4$

f. $\mathbf{C\ (x) - B\ (x) + A\ (x)} = -4x^4 + 3x^2 + 5x - 2 - (6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5) +$
$+ 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 = -2x^4 + x^3 + 6x + 1 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x - 5 =$
$= -8x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x - 6$

g. $\mathbf{A\ (x) - B\ (x) - C\ (x)} = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - (6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5) - (-4x^4$ $+ 3x^2 + 5x - 2) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x - 5 + 4x^4 - 3x^2 -$ $- 5x + 2 = 5x^3 - 8x^2 - 11x - 2$

h. $\mathbf{A\ (x) - [B\ (x) + C\ (x)]} = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - [6x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5 - 4x^4 +$ $+ 3x^2 + 5x - 2] = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 - [2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 12x + 3] =$
$= 5x^3 - 8x^2 - 11x - 2$



2 Efectúa las siguientes operaciones y reduce el resultado todo lo posible:

a. $\mathbf{(4x^2 + 3x) + (2x^2 - x) - (7x^2 + 2x)} = 6x^2 + 2x - 7x^2 - 2x = -x^2$

b. $\mathbf{(-x^3 + 8) + (3x - 3) + (-3x^3 + x^2 - 4x - 1)} = -x^3 + 8 + 3x - 3 - 3x^3 + x^2 - 4x - 1 =$ $= -4x^3 + x^2 - x + 4$

c. $\mathbf{(5x - 3x^2) - (2x - 1) - (-3x^2 + 6) + (x + 3)} = 5x - 3x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 6 + x + 3 =$ $= 4x - 2$

d. $\mathbf{-2x^5 + (3x^4 - x^2 + 2x) + 4x^3 + (-x^5 + 5x^4 + 3x)} = -2x^5 + 3x^4 - x^2 + 2x + 4x^3 + -x^5 +$ $+ 5x^4 + 3x = -3x^5 + 8x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x$

3 Sean los polinomios A (x) = x^2 + 2x + 3, B (x) = –2x^3 + 4x – 1 y C (x) = 4x^2 – 5; calcula y comprueba con Wiris los resultados de las operaciones propuestas.

a. $\mathbf{A\ (x) \cdot B\ (x)} = (x^2 + 2x + 3) \cdot (-2x^3 + 4x - 1) = -2x^5 + 4x^3 - x^2 - 4x^4 + 8x^2 - 2x -$ $- 6x^3 + 12x - 3 = -2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 10x - 3$

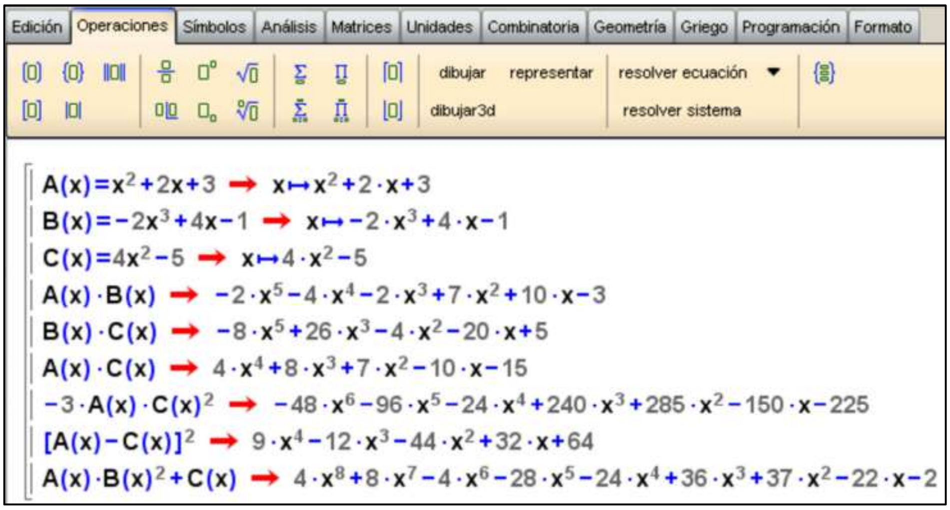
b. $\mathbf{B\ (\mathit{x}) \cdot C\ (\mathit{x})} = (-2x^3 + 4x - 1) \cdot (4x^2 - 5) = -8x^5 + 10x^3 + 16x^3 - 20x - 4x^2 + 5 =$
$= -8x^5 + 26x^3 - 4x^2 - 20x + 5$

c. $\mathbf{A\ (\mathit{x}) \cdot C\ (\mathit{x})} = (x^2 + 2x + 3) \cdot (4x^2 - 5) = 4x^4 - 5x^2 + 8x^3 - 10x + 12x^2 - 15 =$
$= 4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 10x - 15$

d. $\mathbf{-3 \cdot A\ (\mathit{x}) \cdot C\ (\mathit{x})^2} = -3 \cdot (x^2 + 2x + 3) \cdot (4x^2 - 5)^2 = -(3x^2 + 6x + 9) \cdot (16x^4 - 40x^2 +$
$+ 25) = -(48x^6 - 120x^4 + 75x^2 + 96x^5 - 240x^3 + 150x + 144x^4 - 360x^2 + 225) =$
$= -(48x^6 + 96x^5 + 24x^4 - 240x^3 - 285x^2 + 150x + 225) = -48x^6 - 96x^5 - 24x^4 +$
$+ 240x^3 + 285x^2 - 150x - 225$

e. $\mathbf{[A\ (\mathit{x}) - C\ (\mathit{x})]^2} = [(x^2 + 2x + 3) - (4x^2 - 5)]^2 = [x^2 + 2x + 3 - 4x^2 + 5)]^2 =$
$= [-3x^2 + 2x + 8]^2 = (-3x^2 + 2x + 8) \cdot (-3x^2 + 2x + 8) = 9x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 6x^3 +$
$+ 4x^2 + 16x - 24x^2 + 16x + 64 = 9x^4 - 12x^3 - 44x^2 + 32x + 64$

f. $\mathbf{A\ (\mathit{x}) \cdot B\ (\mathit{x})^2 + C\ (\mathit{x})} = (x^2 + 2x + 3) \cdot (-2x^3 + 4x - 1)^2 + 4x^2 - 5 =$
$= (x^2 + 2x + 3) \cdot (-2x^3 + 4x - 1) \cdot (-2x^3 + 4x - 1) + 4x^2 - 5 =$
$= (x^2 + 2x + 3) \cdot (4x^6 - 8x^4 + 2x^3 - 8x^4 + 16x^2 - 4x + 2x^3 - 4x + 1) + 4x^2 - 5 =$
$= (x^2 + 2x + 3) \cdot (4x^6 - 16x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 1) + 4x^2 - 5 =$
$= 4x^8 + 8x^7 + 12x^6 - 16x^6 - 32x^5 - 48x^4 + 4x^5 + 8x^4 + 12x^3 + 16x^4 + 32x^3 + 48x^2 - 8x^3 -$
$- 16x^2 - 24x + x^2 + 2x + 3 + 4x^2 - 5 = 4x^8 + 8x^7 - 4x^6 - 28x^5 - 24x^4 + 36x^3 + 37x^2 -$
$- 22x - 2$



4 Halla las siguientes identidades notables:

a. $\mathbf{(\mathit{x} - 3)^2} = x^2 - 6x + 9$

b. $\mathbf{(\mathit{x}^3 + 4\mathit{x}) \cdot (\mathit{x}^3 - 4\mathit{x})} = x^6 - 16x^2$

c. $\left(\frac{x}{5} + 6\right)^2 = \frac{x^2}{25} + 2 \cdot \frac{x}{5} \cdot 6 + 36 = \frac{x^2}{25} + \frac{12}{5}x + 36$

d. $\mathbf{(4\mathit{x}^2 + 5)^2} = 16x^4 + 40x^2 + 25$

e. $\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}-\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{9x^4}{16}-2\cdot\frac{3x^2}{4}\cdot\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{9x^4}{16}-\frac{3x^3}{4}+\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9x^4}{4}-3x^3+x^2\right)$

f. $\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) = \frac{x^2}{4}-\frac{1}{9}$

5 Efectúa las siguientes potencias:

a. $\mathbf{(x + 2)^3}$

Se puede calcular directamente con los coeficientes del triángulo de Tartaglia o bien practicando el cuadrado de un polinomio y luego multiplicando de nuevo por el mismo polinomio.

$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 3 \cdot 2^2\cdot x+ 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x+ 8$

b. $\mathbf{(3x^2 - 5x - 1)^2} = (3x^2 - 5x - 1) \cdot (3x^2 - 5x - 1) = 9x^4 - 15x^3 - 3x^2 - 15x^3 + 25x^2 + 5x - 3x^2 + 5x + 1 = 9x^4 - 30x^3 + 19x^2 + 10x + 1$

c. $\mathbf{(x^2 + x + 4)^3} = (x^2 + x + 4) \cdot (x^2 + x + 4) \cdot (x^2 + x + 4) =$

$= (x^4 + x^3 + 4x^2 + x^3 +x^2 + 4x + 4x^2 + 4x + 16) \cdot (x^2 + x + 4) =$

$= (x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 16) \cdot (x^2 + x + 4) =$

$= x^6 + x^5 + 4x^4 + 2x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 9x^4 + 9x^3 + 36x^2 + 8x^3 + 8x^2 + 32x + 16x^2 + 16x + 64 = x^6 + 3x^5 + 15x^4 + 25x^3 + 60x^2 + 48x + 64$

6 Realiza y simplifica estas operaciones:

a. $\mathbf{(x - 4) \cdot (x + 4) - (x - 4)^2} = x^2 - 16 - x^2 - (8x + 16) = 8x - 32$

b. $\mathbf{(4x + 3)^2 - 4 \cdot (x - 2)^2 + 3x^2} = 16x^2 + 24x + 9 - 4 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 3x^2 =$

$= 19x^2 + 24x + 9 - 4x^2 + 16x - 16 = 15x^2 + 40x - 7$

c. $\mathbf{(5 + 2x)^2 + (2x - 5)^2 + 2 \cdot (2x + 5) \cdot (2x - 5)} = 25 + 20x + 4x^2 + 4x^2 - 20x + 25 + 8x^2 - 50 = 16x^2$

d. $\mathbf{(x - 1)^3 - (x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^2 -1) \cdot (x - 1) =$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 - x^2 - x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + x^2 + x - 1 =$

$= - 2x^2 + 4x - 2$

7 Calcula y simplifica.

a. $\mathbf{(x + 4) \cdot (x^2 - 3x) + (3x^4 - 2x^2 + 5x)} = x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 12x + 3x^4 - 2x^2 + 5x = 3x^4 + x^3 - x^2 - 7x$

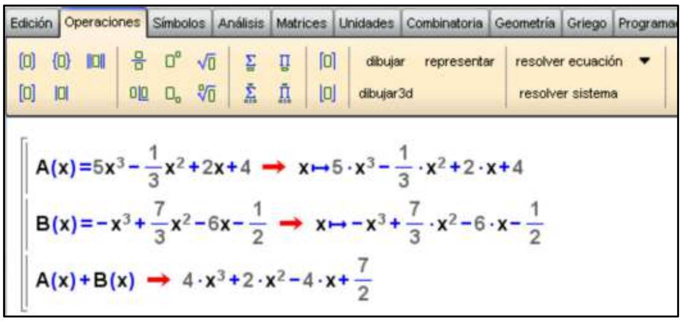
b. $\mathbf{(3x - 2)^2 - 5 \cdot (4x^2 + x - 2)} = 9x^2 -12x + 4 - 20x^2 - 5x + 10 = -11x^2 - 17x + 14$

c. $\mathbf{(x^2 + 1) \cdot (x - 2) + 2x^3 \cdot (7x - 3)} = x^3 - 2x^2 + x - 2 + 14x^4 - 6x^3 = 14x^4 - 5x^3 - 2x^2 +x - 2$

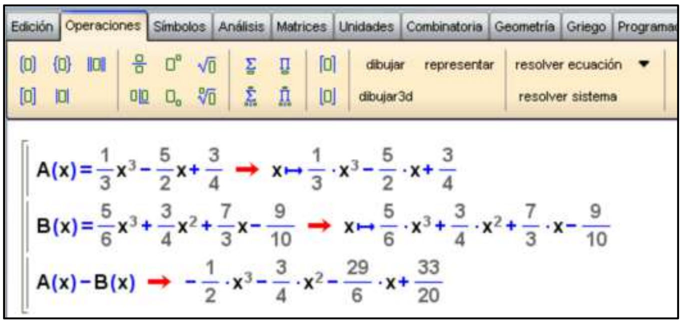
d. $\mathbf{(x^2 - x - 6) \cdot (x - 3) - x \cdot (x - 2)} = x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 6x + 18 - x^2 + 2x =$
$= x^3 - 5x^2 - x + 18$

8 Opera y reduce al máximo. Comprueba los resultados con Wiris.

a. $\left(\mathbf{5x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4}\right) + \left(\mathbf{-x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 6x - \frac{1}{2}}\right) = 4x^3 + 2x^2 - 4x - \frac{7}{2}$

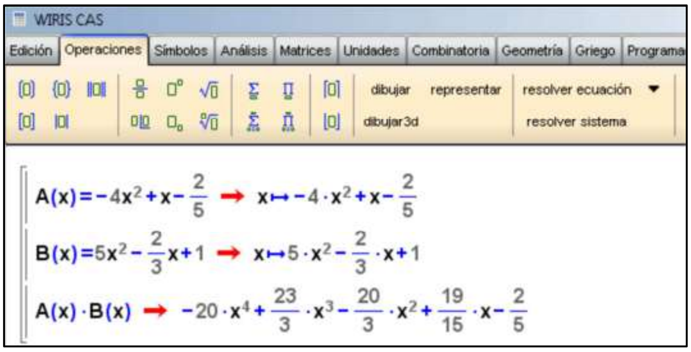


b. $\left(\mathbf{\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{4}}\right) - \left(\mathbf{\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{9}{10}}\right) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{29}{6}x + \frac{33}{20}$



c. $\left(\mathbf{-4x^2 + x - \frac{2}{5}}\right) \cdot \left(\mathbf{5x^2 - \frac{2}{3}x + 1}\right) = -20x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - 2x^2 +$

$+ \frac{4}{15}x - \frac{2}{5} = -20x^4 + \frac{23}{3}x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{19}{15}x - \frac{2}{5}$



9 Se dispone de un cubo de (x + 2) cm de arista.

a. Expresa mediante un polinomio el área de una cara y el área total del cubo.

$A_{cara}(x) = (x + 2) \cdot (x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$A_{total}(x) = 6 \cdot A_{cara}(x) = 6 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 6x^2 + 24x + 24$

b. Expresa mediante un polinomio el volumen del cubo.

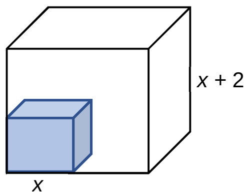
$V(x) = A_{cara\ (base)}(x) \cdot h = (x^2 + 4x + 4) \cdot (x + 2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

c. Si se introduce dentro de él otro cubo sólido de x cm de arista, ¿cuál será el volumen del cubo grande que queda vacío?

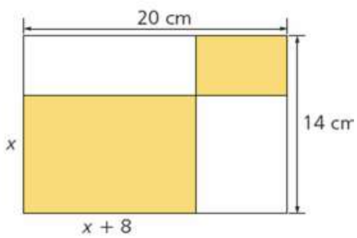
$V_{grande} = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$V_{pequeño} = x \cdot x \cdot x = x^3$

$V(x) = V_{grande} - V_{pequeño} = 6x^2 + 12x + 8$



10 Halla la expresión algebraica del área coloreada.



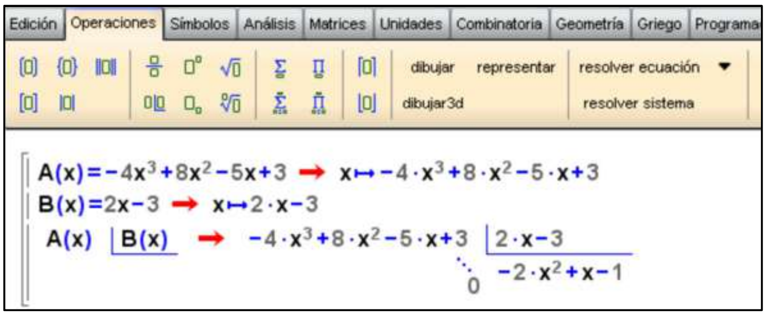
$A_{coloreada}(x) = (x + 8) \cdot x + (20 - (x + 8)) \cdot (14 - x) = x^2 + 8x + (12 - x) \cdot (14 - x) =$
$= x^2 + 8x + 168 - 12x - 14x + x^2 = 2x^2 - 18x + 168$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS. REGLA DE RUFFINI

11 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba tus resultados con Wiris.

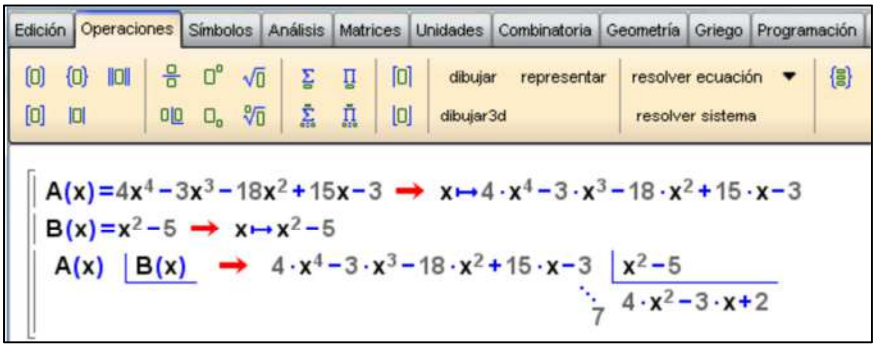
a. $(-4x^3 + 8x^2 - 5x + 3) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{l|l} -4x^3 + 8x^2 - 5x + 3 & 2x - 3 \\ \cline{2-2} +4x^3 - 6x^2 & -2x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1} 0 + 2x^2 - 5x + 3 & \\ \quad -2x^2 + 3x & \\ \cline{1-1} \qquad 0 - 2x + 3 & \\ \qquad\quad +2x - 3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$



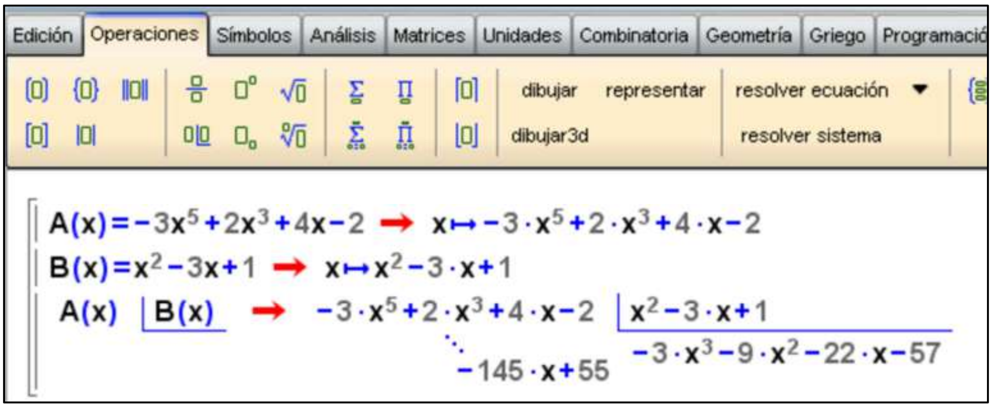
b. $(4x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 15x - 3) : (x^2 - 5)$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 15x - 3 & x^2 - 5 \\ \cline{2-2} -4x^4 \qquad + 20x^2 & 4x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1} \quad - 3x^3 + 2x^2 + 15x - 3 & \\ \quad + 3x^3 \qquad\quad - 15x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad + 2x^2 - 3 & \\ \qquad\quad - 2x^2 + 10 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad 7 & \end{array}$$



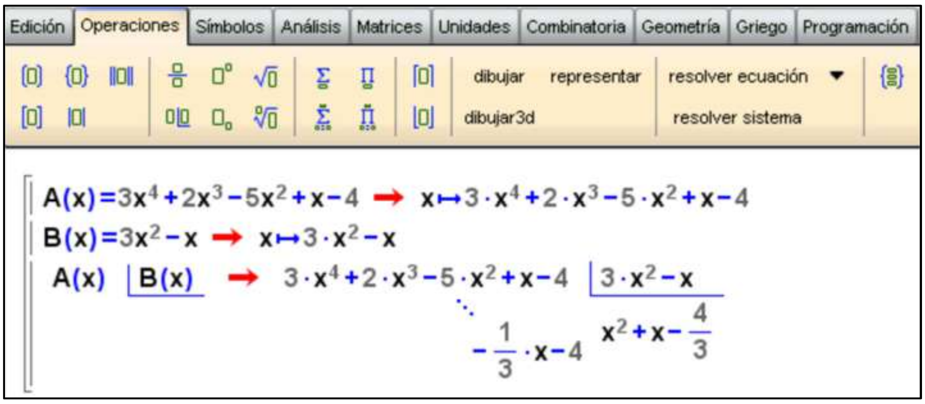
c. $(-3x^5 + 2x^3 + 4x - 2) : (x^2 - 3x + 1)$

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^5 + 2x^3 + 4x - 2 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^5 - 9x^4 + 3x^3} & -3x^3 - 9x^2 - 22x - 57 \\
\quad -9x^4 + 5x^3 + 4x - 2 & \\
\quad \underline{9x^4 - 27x^3 + 9x^2} & \\
\qquad -22x^3 + 9x^2 + 4x - 2 & \\
\qquad \underline{22x^3 - 66x^2 + 22x} & \\
\qquad\quad -57x^2 + 26x - 2 & \\
\qquad\quad \underline{57x^2 - 171x + 57} & \\
\qquad\qquad -145x + 55 &
\end{array}
$$



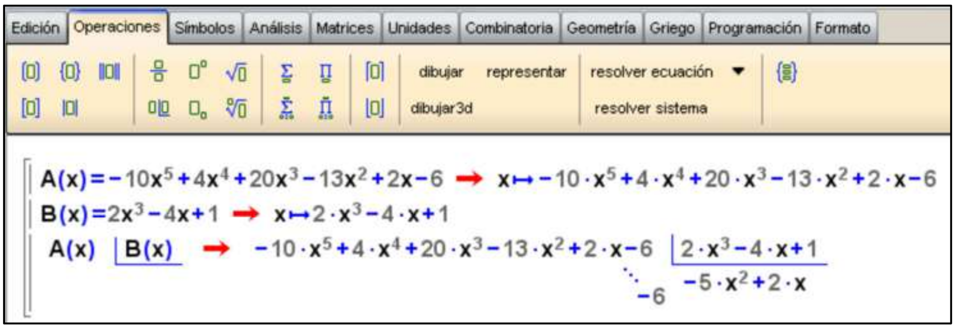
d. $(3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 4) : (3x^2 - x)$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 4 & 3x^2 - x \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^4 + x^3} & x^2 + x - \frac{4}{3} \\
\quad 3x^3 - 5x^2 + x - 4 & \\
\quad \underline{-3x^3 + x^2} & \\
\qquad -4x^2 + x - 4 & \\
\qquad \underline{4x^2 - \frac{4}{3}x} & \\
\qquad\quad -\frac{1}{3}x - 4 &
\end{array}
$$



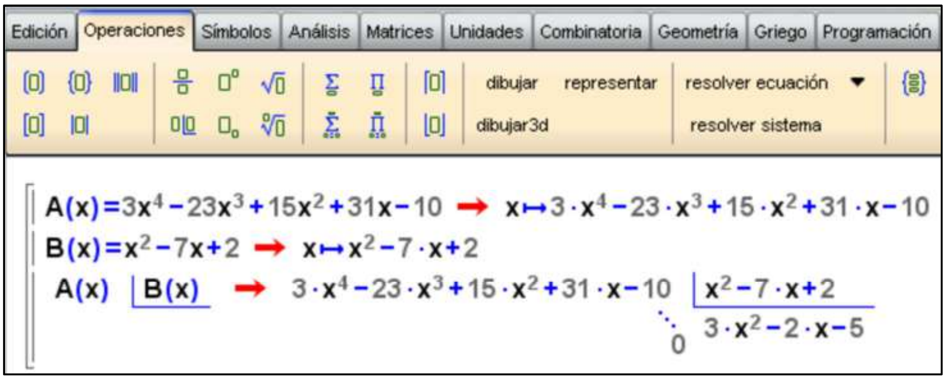
e. $(-10x^5 + 4x^4 + 20x^3 - 13x^2 + 2x - 6) : (2x^3 - 4x + 1)$

$$
\begin{array}{l|l}
-10x^5 + 4x^4 + 20x^3 - 13x^2 + 2x - 6 & \underline{2x^3 - 4x + 1} \\
\underline{+10x^5 \qquad -20x^3 + 5x^2 \qquad\qquad} & -5x^2 + 2x \\
\qquad + 4x^4 \qquad -8x^2 + 2x - 6 & \\
\underline{\qquad -4x^4 \quad + 8x^2 - 2x \qquad} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -6 &
\end{array}
$$



f. $(3x^4 - 23x^3 + 15x^2 + 31x - 10) : (x^2 - 7x + 2)$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 23x^3 + 15x^2 + 31x - 10 & \underline{x^2 - 7x + 2} \\
\underline{-3x^4 + 21x^3 \quad -6x^2 \qquad\qquad} & 3x^2 - 2x - 5 \\
\qquad -2x^3 + 9x^2 + 31x - 10 & \\
\underline{\qquad 2x^3 - 14x^2 + 4x \qquad} & \\
\qquad\qquad -5x^2 + 35x - 10 & \\
\underline{\qquad\qquad 5x^2 - 35x + 10} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$



SOLUCIONES PÁG. 63

12 Encuentra un polinomio cuya división entre $x^2 - 3$ dé como cociente $-2x + 4$ y como resto $-11x + 15$.

El producto de cociente por divisor más el resto es el polinomio solicitado:

$P(x) = (x^2 - 3) \cdot (-2x + 4) - 11x + 15 = -2x^3 + 4x^2 + 6x - 12 - 11x + 15 =$

$= -2x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

13 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto:

a. $(x^3 - 10x^2 + 26x - 5) : (x - 5)$

	1	–10	26	–5
5		5	–25	5
	1	–5	1	0

$(x^3 - 10x^2 + 26x - 5) : (x - 5) = x^2 - 5x + 1;\ r(x) = 0$

b. $(6x^4 + 4x^3 + x^2 + x - 1) : (x + 1)$

	6	4	1	1	–1
–1		–6	2	–3	2
	6	–2	3	–2	1

$(6x^4 + 4x^3 + x^2 + x - 1) : (x + 1) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 2;\ r(x) = 1$

c. $(x^7 + 1) : (x - 1)$

	1	0	0	0	0	0	0	1
1		1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	2

$(x^7 + 1) : (x - 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1;\ r(x) = 2$

d. $(4x^5 - 3x^3 + x - 1) : (x + 2)$

	4	0	–3	0	1	–1
–2		–8	16	–26	52	–106
	4	–8	13	–26	53	–107

$(4x^5 - 3x^3 + x - 1) : (x + 2) = 4x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 26x + 53\ ;\ r(x) = -107$

e. $\left(3x^3 - 11x^2 + 12x + 4\right) : \left(x - \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -11 & 12 & 4 \\ \frac{2}{3} & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 3 & -9 & 6 & \boxed{8} \end{array}$$

$$\left(3x^3 - 11x^2 + 12x + 4\right) : \left(x - \frac{2}{3}\right) = 3x^2 - 9x + 6; r(x) = 8$$

14 Averigua el valor de *k* para que:

a. El resto de la división ($x^4 - 10x^3 + kx^2 - 7x + 11$) : ($x - 6$) sea 5.

($x^4 - 10x^3 + kx^2 - 7x + 11$) : ($x - 6$)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -10 & k & -7 & 11 \\ 6 & & 6 & -24 & -144 + 6k & -906 + 36k \\ \hline & 1 & -4 & -24 + k & -151 + 6k & \boxed{11 - 906 + 36k} \end{array}$$

Como el resto es igual a 5,

r (x) = 5 = 11 – 906 + 36k $\Longrightarrow$ 36k = 900 $\Longrightarrow$ k = 25

b. La división ($x^3 - x^2 + kx + 4$) : ($x + 4$) sea exacta.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & k & 4 \\ -4 & & -4 & 20 & -4k - 80 \\ \hline & 1 & -5 & k + 20 & \boxed{-4k - 76} \end{array}$$

Como el resto es igual a 0,

r (x) = 0 = –4k –76 $\Longrightarrow$ 4k = –76 $\Longrightarrow$ k = –19

15 Halla el valor de *a* y *b* para que la siguiente división dé un resultado exacto: ($x^3 + ax^2 + bx + 8$) : ($x^2 - 3x + 2$)

$$\begin{array}{l|l} x^3 + ax^2 + bx + 8 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -x^3 + 3x^2 - 2x & x + (3 + a) \\ \quad (3 + a)x^2 + (-2 + b)x + 8 & \\ -(3 + a)x^2 + 3 \cdot (3 + a)x + 2 \cdot (3 + a) & \\ \hline \qquad (7 + b + 3a)x + 14 + 2a & \end{array}$$

Si el resultado es exacto significa que el resto r (x) = 0, por tanto:

3a + b + 7 = 0

2 – 2a = 0 $\Longrightarrow$ a = 1; b = –10

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL RESTO

16 Determina el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados:

a. $P(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ **para** $x = 0$

$P(0) = -8 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 7 = 7$

b. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 2$ **para** $x = -5$

$P(-5) = -5^3 + 4 \cdot (-5)^2 - 9 \cdot (-5) - 2 = 18$

c. $P(x) = -2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5$ **para** $x = 3$

$P(3) = -2 \cdot 3^4 + 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 = -157$

d. $P(x) = -3x^5 + 2x^4 - 8x^2 + 4x$ **para** $x = -1$

$P(-1) = -3 \cdot (-1)^5 + 2 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -7$

e. $P(x) = 16x^3 - 20x^2 + 10x - 1$ **para** $x = \frac{3}{4}$

$$P\left(\frac{3}{4}\right) = 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 10 \cdot \frac{3}{4} - 1 = 2$$

17 El valor numérico de un polinomio, P (*x*), en *x* = –2 vale –7, y el cociente de su división entre *x* + 2 es $x^3 - 5x^2 + 4$. Averigua cuál es dicho polinomio.

El valor numérico P (–2), coincide con el valor del resto cuando se divide P (*x*) por el factor *x* + 2:

$P(-2) = -7 = r(x)$

$P(x) = (x^3 - 5x^2 + 4) \cdot (x + 2) + r(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^3 - 10x^2 + 4x + 8 - 7 =$

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 4x + 1$

18 Halla el resto de las siguientes divisiones sin efectuar la división:

El valor numérico P (*a*), coincide con el valor del resto cuando se divide P (*x*) entre el factor *x* – a.

a. $(2x^3 + 5x^2 - 7) : (x - 1)$

$P(1) = 2 \cdot (1)^3 + 5 \cdot (1)^2 - 7 = 0$

b. $(x^4 - 3x^2 - 1) : (x + 7)$

$P(-7) = (-7)^4 - 3 \cdot (-7)^2 - 1 = 2\,253$

c. $(-x^3 + 20x + 14) : (x - 6)$

$P(6) = -(6)^3 + 20 \cdot 6 + 14 = -82$

d. $\left(9x^2 - x + 3\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{11}{3}$$

19 Utilizando la regla de Ruffini y el teorema del resto, comprueba que obtienes el mismo resultado, al calcular el resto de la división (x^5 – $3x^4$ + $2x^3$ – x^2 + 5) : : (x + 1).

Según la regla de Ruffini:

	1	–3	2	–1	o	5
–1		–1	4	–6	7	–7
	1	–4	6	–7	7	$\boxed{-2}$

(x^5 – $3x^4$ + $2x^3$ – x^2 + 5) : (x + 1) = x^4 – $4x^3$ + $6x^2$ – $7x$ + 7; $r(x)$ = –2

Según el teorema del resto:

P (–1) = $(–1)^5$ – 3 · $(–1)^4$ + 2 · $(–1)^3$ – $(–1)^2$ + 5 = –2

Se obtiene el mismo resultado.

20 Sin hacer la división, halla el valor de *m* sabiendo que el cociente (–$5x^3$ – $12x^2$ + + mx – 6) : (x + 3) tiene como resto –9.

Se aplica el teorema del resto para x = –3 y se despeja m:

P (–3) = –5 · $(–3)^3$ – 12 · $(–3)^2$ + m · (–3) – 6 = –9 $\Longrightarrow$ 21 – 3m = –9 $\Longrightarrow$ m = 10

21 Dado el polinomio P (x) = = x^4 – $2x^3$ + $4x^2$ + ax + b, encuentra el valor de *a* y *b* para que P (–2) = 42 y P (2) = 6.

Se aplica el teorema del resto para x = –2 y x = 2.

P (–2) = = $(–2)^4$ – 2 · $(–2)^3$ + 4· $(–2)^2$ + a· (–2) + b = 42 $\Longrightarrow$ 2a – b = 6

P (2) = = $(2)^4$ – 2 · $(2)^3$ + 4· $(2)^2$ + a· (2) + b = 6 $\Longrightarrow$ 2a + b = –10

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2a - b = 6 \\ 2a + b = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -8 \end{array}\right.$$

22 Sea el polinomio A (x) = $2x^3 + kx^2 - 3x + 2$:

a. Calcula el valor de *k* para que A (–2) = –20.

$A(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = -20 \Longrightarrow 4k = -12 \Longrightarrow k = -3$

b. Descompón el polinomio en un producto de factores para el valor de *k* hallado.

Se buscan las raíces del polinomio según la regla de Ruffini, y sabiendo que tales raíces deben ser divisoras del término independiente, 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \\ & & & & \\ 2 & & 4 & -2 & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

El producto de factores es:

$A(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 1) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - \frac{1}{2})$

c. Indica cuáles son las raíces del polinomio.

Las raíces son: $x = -1$; $x = 2$ y $x = \frac{1}{2}$

23 Una fotografía rectangular está colocada en un marco de 3 cm de ancho. Si la foto tiene 5 cm más de largo que de ancho, halla:

a. La expresión del área de la fotografía.

$A_{foto}(x) = x \cdot (5 + x) = x^2 + 5x$

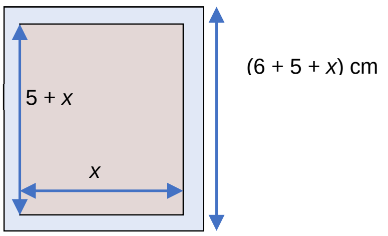
b. La expresión que da el área del marco.

$A_{marco} = [(6 + 5 + x) \cdot 3] \cdot 2 + (x \cdot 3) \cdot 2 = 12x + 66$

c. El valor de ambas áreas si el ancho de la fotografía es de 13 cm.

$A_{foto}(13) = 13^2 + 5 \cdot 13 = 234 \text{ cm}^2$

$A_{marco} = 12 \cdot 13 + 66 = 222 \text{ cm}^2$



RAÍCES DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL FACTOR

24 Di cuáles son los divisores del término independiente del polinomio A (x) = = $5x^3 + 4x^2 - 31x + 6$. ¿Cuál de estos números es raíz del polinomio?

Son divisores D (6) = {±1, ±2, ±3, ±6}.

Para que un número sea raíz de un polinomio es necesario que sea un divisor de su término independiente. En este caso se comprueba cuáles de esos divisores son raíces:

	5	4	–31	6
2		10	28	–6
	5	14	–3	0

$x = 2$ es una raíz.

	5	14	–3
–3		–15	3
	5	–1	0

$x = -3$ es otra raíz.

25 Comprueba si los números –2, 0, 3 y $\frac{3}{2}$ son raíces del polinomio A (x) = $2x^3 + x^2 - 6x$.

$A(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 0$

$A(0) = 2 \cdot 0^3 + 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$

$A(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 = 45$

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Son raíces $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$

26 Para el polinomio A (x) = $2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 7x + 4$, ¿cuántas raíces tiene? ¿Son todas enteras? Halla todas sus raíces enteras.

El polinomio es de grado 4, luego tiene 4 raíces reales.

Las raíces enteras de A (x) deben ser divisores del término independiente,

D (4) = {±1, ±2, ±4}. Se comprueba cuáles de estos divisores son raíz del polinomio:

$A(1) = 2 \cdot 1^4 - 7 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 4 = 0$

$A(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 7 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 4 = 0$

$A(2) = 2 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 4 = -30$

$A(-2) = 2 \cdot (-2)^4 - 7 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) + 4 = 54$

$A(4) = 2 \cdot 4^4 - 7 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 4 = 0$

$A(-4) = 2 \cdot (-4)^4 - 7 \cdot (-4)^3 - 6 \cdot (-4)^2 + 7 \cdot (-4) + 4 = 840$

Las raíces enteras resultan ser $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$, por tanto, una de las cuatro raíces de A (x) no es entera.

27 Establece las raíces enteras de los siguientes polinomios. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $x^2 - 5x - 6$

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente: D (–6) = {±1, ±2, ±3, ±6}.

$P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -10 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

$P(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ es una raíz del polinomio.

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = -12 \Rightarrow x = 2$ no es una raíz del polinomio.

$P(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6 = 8 \Rightarrow x = -2$ no es una raíz del polinomio.

$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 - 6 = -12 \Rightarrow x = 3$ no es una raíz del polinomio.

$P(-3) = (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 6 = 18 \Rightarrow x = -3$ no es una raíz del polinomio.

$P(6) = 6^2 - 5 \cdot 6 - 6 = 0 \Rightarrow x = 0$ es una raíz del polinomio.

$P(-6) = (-6)^2 - 5 \cdot (-6) - 6 = 60 \Rightarrow x = -6$ no es una raíz del polinomio.

Las raíces enteras son $x = -1$ y $x = 6$

b. $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$

Son divisores del término independiente D (–12) = {±1, ±2, ±3, ±4 ±6, ±12}.

P (1) = $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 = -12 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

P (–1) = $(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 = -6 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

P (2) = $2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ es una raíz del polinomio.

P (–2) = $(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ es una raíz del polinomio.

P (3) = $3^3 + 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 12 = 30 \Rightarrow x = 3$ no es una raíz del polinomio.

P (–3) = $(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ no es una raíz del polinomio.

También se puede comprobar cuál de los divisores enteros del término independiente es raíz del polinomio también mediante el teorema del resto de esta forma (con el divisor x = 1, por ejemplo):

	1	3	–4	–12
1		1	4	0
	1	4	0	P(1) = –12

Las raíces enteras son x = 2, x = –2 y x = –3. No hace falta buscar más porque el polinomio es de grado 3, y solo tiene 3 raíces enteras.

c. $\boldsymbol{-5x^3 - 8x^2 + 27x + 18}$

Son divisores del término independiente D (18) = {±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18}.

P (1) = $-5 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1 + 18 = 32 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

P (–1) = $-5 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 + 27 \cdot (-1) + 18 = -12 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

P (2) = $-5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 27 \cdot 2 + 18 = 0 \Rightarrow x = 2$ es una raíz del polinomio.

P (–2) = $-5 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-2) + 18 = -28 \Rightarrow x = -2$ no es una raíz del polinomio.

P (3) = $-5 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 + 18 = -144 \Rightarrow x = 3$ no es una raíz del polinomio.

P (–3) = $-5 \cdot (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 + 27 \cdot (-3) + 18 = 0 \Rightarrow x = -3$ es una raíz del polinomio.

P (6) = $-5 \cdot 6^3 - 8 \cdot 6^2 + 27 \cdot 6 + 18 = -1188 \Rightarrow x = 6$ no es una raíz del polinomio.

P (–6) = $-5 \cdot (-6)^3 - 8 \cdot (-6)^2 + 27 \cdot (-6) + 18 = 648 \Rightarrow x = -6$ no es una raíz del polinomio.

P (9) = $-5 \cdot 9^3 - 8 \cdot 9^2 + 27 \cdot 9 + 18 = -4\,032 \Rightarrow x = 9$ no es una raíz del polinomio.

P (–9) = $-5 \cdot (-9)^3 - 8 \cdot (-9)^2 + 27 \cdot (-9) + 18 = 2\,762 \Rightarrow x = -9$ no es una raíz del polinomio.

P (18) = $-5 \cdot 18^3 - 8 \cdot 18^2 + 27 \cdot 18 + 18 = -31248 \Rightarrow x = 18$ no es una raíz del polinomio.

P (–18) = $-5 \cdot (-18)^3 - 8 \cdot (-18)^2 + 27 \cdot (-18) + 18 = 26\,100 \Rightarrow x = -18$ no es una raíz del polinomio.

Las raíces enteras son $x = 2$ y $x = -3$. La tercera raíz no es entera.

d. $\boldsymbol{6x^3 - 7x^2 - x + 2}$

Son divisores del término independiente D (2) = {±1, ±2}.

P (1) = $6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ es una raíz del polinomio.

P (–1) = $6 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = -10 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

P (2) = $6 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 20 \Rightarrow x = 2$ no es una raíz del polinomio.

P (–2) = $6 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2 = -72 \Rightarrow x = -2$ no es una raíz del polinomio.

La raíz entera es $x = 1$. Las otras dos raíces no son enteras.

e. $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}$

Son divisores del término independiente D (2) = {±1, ±2, ±3, ±6}.

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 6 = -6 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 6 = -2 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 4 \Rightarrow x = 2$ no es una raíz del polinomio.

$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ es una raíz del polinomio.

$P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 6 = 30 \Rightarrow x = 3$ no es una raíz del polinomio.

$P(-3) = (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 6 = -6 \Rightarrow x = -3$ no es una raíz del polinomio.

$P(6) = 6^3 + 2 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 - 6 = 264 \Rightarrow x = 6$ no es una raíz del polinomio.

$P(-6) = (-6)^3 + 2 \cdot (-6)^2 - 3 \cdot (-6) - 6 = -132 \Rightarrow x = -6$ no es una raíz del polinomio.

La raíz entera es $x = -2$. Las otras dos raíces no son enteras.

f. $\boldsymbol{x^4 - 3x^3 + x^2 - 15x - 20}$

Son divisores del término independiente D (–20) = {±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20}.

$P(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 1^2 - 15 \cdot 1 - 20 = -38 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

$P(-1) = (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 20 = 0 \Rightarrow x = -1$ es una raíz del polinomio.

$P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 15 \cdot 2 - 20 = -54 \Rightarrow x = 2$ no es una raíz del polinomio.

$P(-2) = (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 15 \cdot (-2) - 20 = 54 \Rightarrow x = -2$ no es una raíz del polinomio.

$P(4) = 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 4^2 - 15 \cdot 4 - 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ es una raíz del polinomio.

$P(-4) = (-4)^4 - 3 \cdot (-4)^3 + (-4)^2 - 15 \cdot (-4) - 20 = 504 \Rightarrow x = -4$ no es una raíz del polinomio.

$P(5) = 5^4 - 3 \cdot 5^3 + 5^2 - 15 \cdot 5 - 20 = 430 \Rightarrow x = 5$ no es una raíz del polinomio.

$P(-5) = (-5)^4 - 3 \cdot (-5)^3 + (-5)^2 - 15 \cdot (-5) - 20 = 830 \Rightarrow x = -5$ no es una raíz del polinomio.

$P(10) = 10^4 - 3 \cdot 10^3 + 10^2 - 15 \cdot 10 - 20 = 6\,930 \Rightarrow x = 10$ no es una raíz del polinomio.

$P(-10) = (-10)^4 - 3 \cdot (-10)^3 + (-10)^2 - 15 \cdot (-10) - 20 = 14\,130 \Rightarrow x = -10$ no es una raíz del polinomio.

$P(20) = 20^4 - 3 \cdot 20^3 + 20^2 - 15 \cdot 20 - 20 = 136\,080 \Rightarrow x = 20$ no es una raíz del polinomio.

$P(-20) = (-20)^4 - 3 \cdot (-20)^3 + (-20)^2 - 15 \cdot (-20) - 20 = 184\,680 \Rightarrow x = -20$ no es una raíz del polinomio.

Las raíces enteras son $x = -1$ y $x = 4$. Las otras dos raíces no son enteras.

g. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Son divisores del término independiente D (1) = {±1}.

P (1) = $1^4 - 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ es una raíz del polinomio.

P (–1) = $(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 16 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

La raíz entera es $x = 1$.

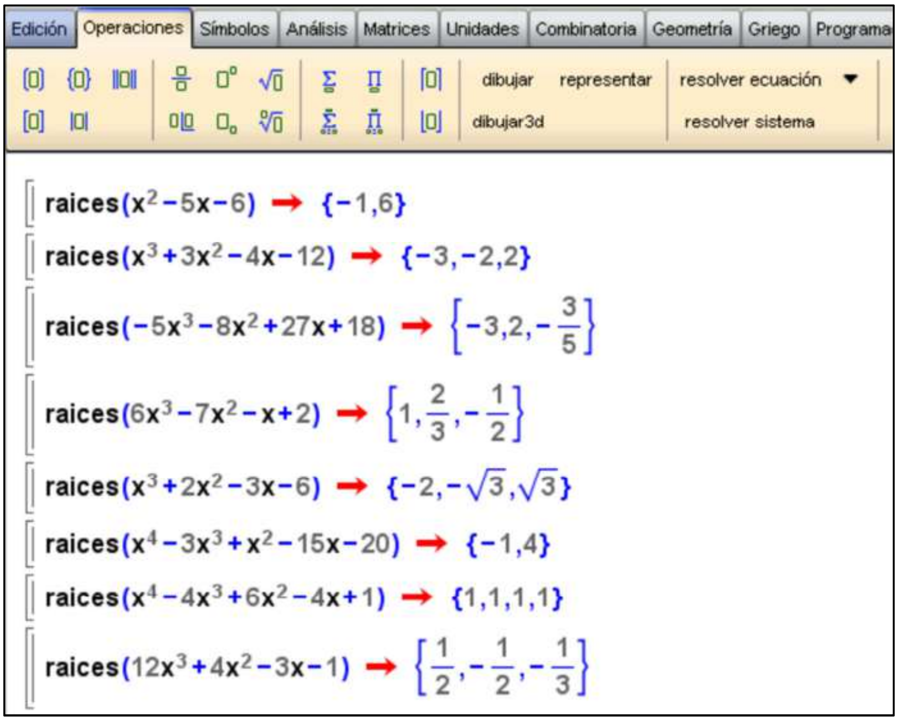
h. $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

Son divisores del término independiente D (–1) = {±1}.

P (1) = $12 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 12 \Rightarrow x = 1$ no es una raíz del polinomio.

P (–1) = $12 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 1 = -6 \Rightarrow x = -1$ no es una raíz del polinomio.

No tiene raíces enteras.



28 Averigua si los siguientes binomios son factores del polinomio
P (*x*) = x^3 + + 7x^2 + 7*x* – 15:

Se aplica la regla de Ruffini:

a. ***x* + 1**

	1	7	7	–15
–1		–1	–6	–1
	1	6	1	P(–1) = –16

No es factor.

b. ***x* – 1**

	1	7	7	–15
1		1	8	15
	1	8	15	P(–1) = 0

Sí es factor.

c. ***x* + 3**

	1	7	7	–15
–3		–3	–12	15
	1	4	–5	P(–3) = 0

Sí es factor.

d. ***x* + 5**

	1	7	7	–15
–5		–5	–10	15
	1	2	–3	P(–5) = 0

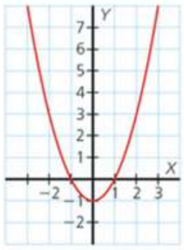
Sí es factor.

SOLUCIONES PÁG. 64

29 Determina cuáles son las raíces de los siguientes polinomios representados:

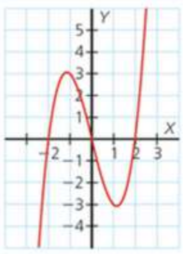
Gráficamente, las raíces de un polinomio, P (*x*), son los valores de las abscisas de los puntos de corte con el eje *X* de la función *y* = P (*x*).

a.



Los puntos de corte en el eje de abscisas son *x* = –1 y *x* = 1, luego esas son las raíces del polinomio.

b.



Los puntos de corte en el eje de abscisas son *x* = –2, *x* = 0 y *x* = 2, luego esas son las raíces del polinomio.

30 Para el polinomio A (*x*) = *x* · (*x* – 4) · (*x* + 2) · (*x* + 7), ¿cuáles son sus raíces?

Un polinomio, P (*x*), tiene como factor (*x* – a) si *x* = a es una raíz del polinomio P (*x*), es decir, las raíces son *x* = 0, *x* = 4, *x* = –2 y *x* = –7.

31 Obtén, en cada caso, un polinomio, P (x), tal que:

a. Sea de grado dos y tenga como raíces –2 y 5.

Si las raíces son $x = -2$ y $x = 5$ y el polinomio es de grado 2 significa que P (x) = $= (x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 3x - 10$

b. Tenga tres raíces enteras.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

c. Sea de grado cuatro y tenga como raíces 0 y 4 (ambas raíces dobles).

Si las raíces son $x = 0$ y $x = 4$ dobles significa que:

$P(x) = x \cdot x \cdot (x - 4) \cdot (x - 4) = x^2 \cdot (x - 4)^2 = x^2 \cdot (x^2 - 8x + 16) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

d. Sea de grado dos y no tenga raíces reales.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x^2 + 1$

e. Tenga como factores $x - 1$ y $x + 3$.

Respuesta abierta, porque puede tener más factores además de los indicados. Si los factores son solamente $x - 1$ y $x + 3$ dobles significa que:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

32 ¿Cuáles son los factores que dividen al polinomio A (x) = $(x + 3)^4$?

Los divisores son $x + 3$, $(x + 3)^2$, $(x + 3)^3$ y $(x + 3)^4$.

33 Halla el valor numérico de P (x) = $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ para $x = -4$ y $x = 1$. ¿Es divisible entre $x + 4$? ¿Y entre $x - 1$?

$P(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) + 8 = -80$

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$

No es divisible entre $(x + 4)$, pero sí lo es entre $(x - 1)$ pues el valor numérico en $x =$ $= 1$ es 0.

34 Factoriza los siguientes polinomios utilizando las identidades notables:

a. $\mathbf{x^2 - 12x + 36} = (x - 6)^2$

b. $\mathbf{4x^2 - 12x + 9} = (2x - 3)^2$

c. $\mathbf{16x^4 - 25} = (4x^2 - 5) \cdot (4x^2 + 5) = (2x + \sqrt{5}) \cdot (2x - \sqrt{5}) \cdot (4x^2 + 5)$

d. $\mathbf{x^2 - 3} = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

35 Factoriza los polinomios propuestos e indica sus raíces. Comprueba los resultados con Wiris.

a. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

	1	–3	–6	8
1		1	–2	–8
	1	–2	–8	0

$x = 1$ es una raíz.

	1	–2	–8
4		4	8
	1	2	0

$x = 4$ es otra raíz.

$(x + 2)$ es un factor, es decir, $x = -2$ es la tercera raíz.

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$

b. $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x$

Se extrae factor común a x:

$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x = x \cdot (x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$

$x = 0$ es una de las raíces.

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las demás raíces:

	1	–6	3	10
–1		–1	7	–10
	1	–7	10	0

$x = -1$ es una raíz.

	1	–7	10
5		5	–10
	1	–2	0

$x = 5$ es otra raíz.

$(x - 2)$ es un factor, luego $x = 2$ es la raíz que faltaba.

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)$

c. $x^4 - 9x^2$

En primer lugar, se extrae factor común a x^2:

$x^4 - 9x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 9) = x^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

Las raíces son $x = 0$, $x = -3$ y $x = 3$.

d. $\mathbf{4x^3 + 7x^2 + 2x - 1}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las raíces:

	4	7	2	–1
–1		–4	–3	1
	4	3	–1	0

$x = -1$ es una raíz.

Se calculan las dos raíces del polinomio $4x^2 + 3x - 1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

Las otras dos raíces son $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -1$ (raíz doble)

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$$P\,(x) = (x - \;1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)$$

e. $\mathbf{-6x^3 - 7x^2 + 9x - 2}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las raíces:

	–6	–7	9	–2
–2		12	–10	2
	–6	5	–1	0

$x = -2$ es una raíz.

Se calculan las dos raíces del polinomio $-6x^2 + 5x - 1$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{-2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

Las otras dos raíces son $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

Finamente, el polinomio queda factorizado así:

$$P\,(x) = (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

f. $\boldsymbol{x^3 + x^2 - 3x - 3}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las raíces:

	1	1	–3	–3
–1		–1	0	3
	1	0	–3	0

$x = -1$ es una raíz.

Se calculan las dos raíces del polinomio $x^2 - 3$, que, utilizando identidades notables queda así:

$x^2 - 3 = (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

$x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$ son las otras dos raíces.

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

g. $\boldsymbol{x^5 - 2x^4 + 9x^3 - 18x^2}$

Se extrae factor común a x^2:

$x^5 - 2x^4 + 9x^3 - 18x^2 = x^2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 9x - 18)$

$x = 0$ es una raíz doble.

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 5 y se buscan las demás raíces:

	1	–2	9	–18
2		2	0	18
	1	0	9	0

$x = 2$ es otra raíz.

No hay más raíces reales, pues el polinomio que queda es $x^2 + 9$.

Finamente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 9)$

h. $\boldsymbol{x^5 + x^4 - 16x - 16}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 5 y se buscan las raíces:

	1	1	0	0	–16	–16
–1		–1	0	0	0	16
	1	0	0	0	–16	0

$x = -1$ es una raíz.

Se buscan las raíces del polinomio que queda, $x^4 - 16$:

	1	0	0	0	–16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0

$x = 2$ es otra raíz.

	1	2	4	8
–2		–2	0	–8
	1	0	4	0

$x = -2$ es otra raíz.

El polinomio que queda, $x^2 + 4$, no tiene raíces reales.

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

i. $\boldsymbol{3x^3 + 13x^2 - 28x + 12}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las raíces:

	3	13	–28	12
1		3	16	–12
	3	16	–12	0

$x = 1$ es una raíz.

Se calculan las dos raíces del polinomio $3x^2 + 16x - 12$:

$$\frac{-16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{-16 \pm 20}{6}$$

Las otras dos raíces son $x = \frac{2}{3}$ y $x = -6$

Finalmente, el polinomio queda factorizado así:

$$P(x) = (x - 1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x + 6)$$

j. $\boldsymbol{x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4}$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 4 y se buscan las raíces:

	1	–7	15	–13	4
1		1	–6	9	–4
	1	–6	9	–4	0

$x = 1$ es una raíz.

	1	–6	9	–4
4		4	–8	4
	1	–2	1	0

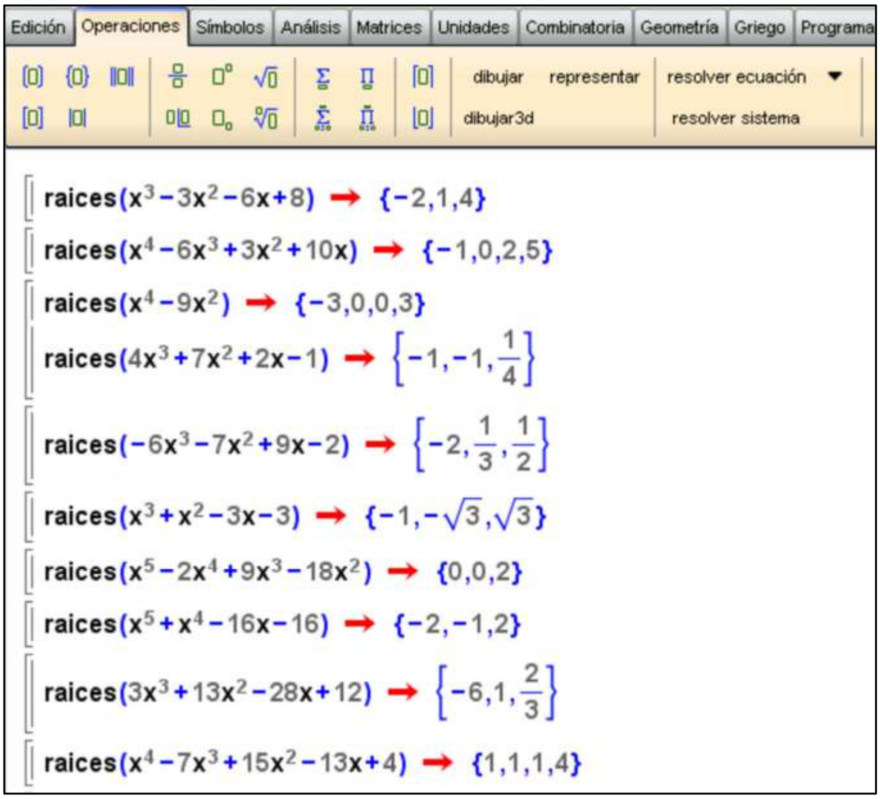
$x = 4$ es otra raíz.

	1	–2	1
1		1	–1
	1	–1	0

$x = 1$ es una raíz triple, pues se ha encontrado una al aplicar Ruffini al polinomio de grado 4 y otras dos al aplicar Ruffini después.

Finamente, el polinomio queda factorizado así:

$P(x) = (x + 1)^3 \cdot (x - 4)$



36 Obtén la descomposición factorial de los siguientes polinomios e indica cuántas raíces reales tienen:

a. $2x^3 + 4x^2 - 4x - 8$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 3 y se buscan las raíces reales:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 4 & -4 & -8 \\ -2 & & -4 & 0 & 8 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$x = -2$ es una raíz,

El polinomio que queda es $2x^2 - 4$, cuyas raíces son:

$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

La descomposición factorial del polinomio es:

$P(x) = (x + 2) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$

P (x) tiene tres raíces reales, $x = -2$, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

b. $x^4 - 15x^2 - 16$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 4 y se buscan las raíces reales:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & 0 & -16 \\ 4 & & 4 & 16 & 4 & 16 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

$x = 4$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & 4 \\ -4 & & -4 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x = -4$ es otra raíz.

El polinomio que queda es $x^2 + 1$, cuyas raíces no son reales.

La descomposición factorial del polinomio es:

$P(x) = (x - 4) \cdot (x + 4) \cdot (x^2 + 1)$

P (x) tiene dos raíces reales, $x = 4$ y $x = -4$.

c. x^4 – 16

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 4 y se buscan las raíces reales:

	1	0	0	0	–16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0

$x = 2$ es una raíz.

	1	2	4	8
–2		–2	0	–8
	1	0	4	0

$x = –2$ es otra raíz.

El polinomio que queda es $x^2 + 4$, cuyas raíces no son reales.

La descomposición factorial del polinomio es:

$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$

P (x) tiene dos raíces reales, $x = 2$ y $x = –2$.

d. $4x^4 + 20x^3 + 13x^2 – 30x + 9$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio de grado 4 y se buscan las raíces reales:

	4	20	13	–30	9
–3		–12	–24	33	–9
	4	8	–11	3	0

$x = –3$ es una raíz.

	4	8	–11	3
–3		–12	12	–3
	4	–4	1	0

$x = –3$ es una raíz doble.

El polinomio que queda es $4x^2 – 4x + 1$, cuyas raíces son:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ es una raíz doble.

La descomposición factorial del polinomio es:

$$P(x) = (x + 3)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

P (x) tiene cuatro raíces reales, $x = –3$ (doble) y $x = \frac{1}{2}$ (doble).

37 Comprueba que el polinomio A (x) = 3x^4 + 7x^2 + 4 no es divisible por un factor x – a para ningún valor de *a* entero.

Se aplica el teorema de resto para averiguar si alguno de los divisores del término independiente, D (4) = {±1, ±2, ±4}, son raíz del polinomio:

$A(1) = 3 \cdot 1^4 + 7 \cdot 1^2 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de P (x).

$A(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 7 \cdot (-1)^2 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ no es raíz de P (x).

$A(2) = 3 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^2 + 4 = 80 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ no es raíz de P (x).

$A(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 7 \cdot (-2)^2 + 4 = 80 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ no es raíz de P (x).

$A(4) = 3 \cdot 4^4 + 7 \cdot 4^2 + 4 = 884 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ no es raíz de P (x).

$A(-4) = 3 \cdot (-4)^4 + 7 \cdot (-4)^2 + 4 = 884 \neq 0 \Rightarrow x = -4$ no es raíz de P (x).

Es decir, de los posibles valores de *a* = {±1, ±2, ±4}, con ninguno de ellos se obtiene resto cero en la división A (x) : (x – a).

38 ¿Es divisible el polinomio x^n – 1 entre x + 1 para cualquier valor de *n* par? ¿Y para un valor de *n* impar? Justifica ambas respuestas.

Si el polinomio $x^n - 1$ es divisible entre $x + 1$ significa que $x = -1$ es una raíz de $x^n - 1$ y que, por tanto, su resto debe ser cero:

- Para *n* par: $(-1^n) - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ Siempre es divisible pues el resto es cero.
- Para *n* impar: $(-1)^n - 1 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow$ No es divisible, pues el resto es distinto de cero.

39 Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de estos polinomios:

a. **P (x) = $(x + 2)^2 \cdot (x - 3)$ y Q (x) = $(x + 2) \cdot (x - 3)^3$**

m.c.m. $[(x + 2)^2 \cdot (x - 3), (x + 2) \cdot (x - 3)^3] = (x + 2)^2 \cdot (x - 3)^3$

m.c.d. $[(x + 2)^2 \cdot (x - 3), (x + 2) \cdot (x - 3)^3] = (x - 3) \cdot (x + 2)$

b. **P (x) = $x \cdot (x - 5)$ y Q (x) = $x^2 \cdot (x + 4)$**

m.c.m. $[x \cdot (x - 5), x^2 \cdot (x + 4)] = x^2 \cdot (x + 4) \cdot (x - 5)$

m.c.d. $[x \cdot (x - 5), x^2 \cdot (x + 4)] = x$

c. **P (x) = $x^2 - 4x + 3$ y Q (x) = $x^3 - 4x^2 + x + 6$**

Se factorizan los polinomios:

P (x) = $x^2 - 4x + 3 = (x - 3) \cdot (x - 1)$

Q (x) = $x^3 - 4x^2 + x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x + 1$ es un factor.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$x - 2$ es otro factor.

$x - 3$ es otro factor.

Q (x) = $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

m.c.m. $[(x - 3) \cdot (x - 1), (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)] = (x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

m.c.d. $[(x - 3) \cdot (x - 1), (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)] = x - 3$

d. **P (x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ y Q (x) = $x^3 - 3x^2 + 2x$**

Se factorizan los polinomios:

P (x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$x - 1$ es un factor.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$x - 2$ es otro factor.

$x - 1$ es otro factor.

P (x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$

Q (x) = $x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x^2 - 3x + 2)$

x es un factor. Se aplica la regla de Ruffini para encontrar los demás:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x - 1$ es otro factor.

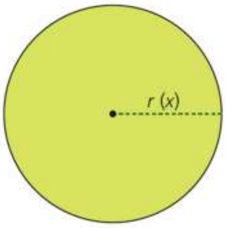
$x - 2$ es otro factor.

Q (x) = $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

m.c.m. $[(x - 1)^2 \cdot (x - 2), x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)] = x \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$

m.c.d. $[(x - 1)^2 \cdot (x - 2), x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)] = (x - 1) \cdot (x - 2)$

40 El área de un círculo de radio r (*x*) viene determinada por la expresión A (*x*) = $9x^2\pi - 6x\pi + \pi$.



a. Encuentra la expresión algebraica de *r* (*x*).

El área de una circunferencia es A = πr^2

A (x) = $[r(x)]^2 = 9x^2\pi - 6x\pi + \pi$

$$A(x) = \pi[r(x)]^2 = 9x^2\pi - 6x\pi + \pi \Rightarrow$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{9x^2\pi - 6x\pi + \pi}{\pi}} = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(3x-1)^2} = 3x - 1$$

b. Halla *r* (5).

r (5) = $3 \cdot 5 - 1 = 14$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

41 Halla el polinomio P (*x*) para que las fracciones sean equivalentes.

a. $\dfrac{\mathbf{P}(x)}{x^2 + 10x + 25} = \dfrac{4x}{x^2 + 5x}$

$$\frac{P(x)}{x^2 + 10x + 25} = \frac{4x}{x^2 + 5x} \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{4x}{x^2 + 5x} \cdot \left(x^2 + 10x + 25\right) = \frac{4x^2 + 40x + 100}{x + 5} = \frac{(2x + 10)^2}{x + 5} = \frac{4 \cdot (x + 5)^2}{x + 5} =$$

$$= 4 \cdot (x + 5) = 4x + 20$$

b. $\dfrac{\mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\mathbf{10}\boldsymbol{x}-\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}=\dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{P}\ (\boldsymbol{x})}$

$$\frac{6x^2-2x}{10x-8x^2}=\frac{3x-1}{\text{P }(x)}\Rightarrow$$

$$\text{P }(x)=\frac{\left(10x-8x^2\right)\cdot(3x-1)}{6x^2-2x}=\frac{(10-8x)\cdot(3x-1)}{6x-2}=\frac{2\cdot(5-4x)\cdot(3x-1)}{2\cdot(3x-1)}=5-4x$$

42 Simplifica sacando factor común y aplicando las identidades notables.

a. $\dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}=\dfrac{(2x-1)^2}{2x-1}=2x-1$

b. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{16}\boldsymbol{x}}=\dfrac{x^2+4x}{x^2+8x+16}=\dfrac{x^2+4x}{(x+4)^2}=x\cdot\dfrac{x+4}{(x+4)^2}=\dfrac{x}{x+4}$

c. $\dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{75}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{10}\boldsymbol{x}+\mathbf{25}}=\dfrac{3\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}=\dfrac{3\cdot(x+5)}{(x-5)}=\dfrac{3x+15}{x-5}$

SOLUCIONES PÁG. 65

43 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{12}\boldsymbol{x}}=\dfrac{x+4}{x^2+x-12}=\dfrac{x+4}{(x-3)\cdot(x+4)}=\dfrac{1}{x-3}$

b. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}}=\dfrac{(x-1)^2}{3x\cdot(x-1)}=\dfrac{x-1}{3x}$

c. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{7}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{15}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}=\dfrac{(x+3)^2\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot(x+1)^2}=\dfrac{x+3}{x+1}$

d. $\dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{20}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{8}}=x\cdot\dfrac{5x^2+20}{(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)}=\dfrac{5x\cdot\left(x^2+4\right)}{(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)}=\dfrac{5x}{x+2}$

e. $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}=\dfrac{x^3\cdot\left(x^2-4x+4\right)}{x^2\cdot(x-2)}=x\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x-2}=x\cdot(x-2)$

f. $\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{12}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{24}\boldsymbol{x}+\mathbf{72}}=\dfrac{2x\cdot(x+6)}{2\cdot\left(x^2+12x+36\right)}=\dfrac{x\cdot(x+6)}{(x+6)^2}=\dfrac{x}{x+6}$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

44 Realiza las siguientes operaciones:

a. $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{x-1}{3x^2}-\dfrac{2-4x}{5x^3}$

m.c.m. $[2x, 3x^2, 5x^3] = 2x \cdot 3x^2 \cdot 5x^3 = 30x^6$

$$\frac{3}{2x}+\frac{x-1}{3x^2}-\frac{2-4x}{5x^3}=\frac{3\cdot 3x^2\cdot 5x^3+(x-1)\cdot 2x\cdot 5x^3-(2-4x)\cdot 2x\cdot 3x^2}{30x^6}=$$

$$=\frac{45x^5+(x-1)\cdot 10x^4-(2-4x)\cdot 6x^3}{30x^6}=\frac{45x^5+10x^5-10x^4-12x^3+24x^4}{30x^6}=$$

$$=\frac{55x^5+14x^4-12x^3}{30x^6}$$

b. $\dfrac{6x^2}{(x-2)^2}-\dfrac{x}{x-2}$

m.c.m. $[x-2, (x-2)^2] = (x-2)^2$

$$\frac{6x^2}{(x-2)^2}-\frac{x}{x-2}=\frac{6x^2-x\cdot(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{6x^2-x^2+2x}{(x-2)^2}=\frac{5x^2+2x}{x^2-4x+4}$$

c. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{x^2-4x}{(x+1)^2}$

m.c.m. $[x, x+1, (x+1)^2] = x\cdot(x+1)^2$

$$\frac{2}{x}-\frac{3x}{x+1}+\frac{x^2-4x}{(x+1)^2}=\frac{2\cdot(x+1)^2-3x\cdot x\cdot(x+1)+(x^2-4x)\cdot x}{x\cdot(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+2-3x^3-3x^2+x^3-4x^2}{x\cdot(x^2+2x+1)}=\frac{-2x^3-5x^2+4x+2}{x^3+2x^2+x}$$

d. $\dfrac{-1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}$

m.c.m. $[x+3, x-1] = (x+3)\cdot(x-1)$

$$\frac{-1-x}{x+3}+\frac{2x}{x-3}=\frac{(-1-x)\cdot(x-3)+2x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=\frac{-x+3-x^2+3x+2x^2+6x}{x^2-9}=\frac{x^2+8x+3}{x^2-9}$$

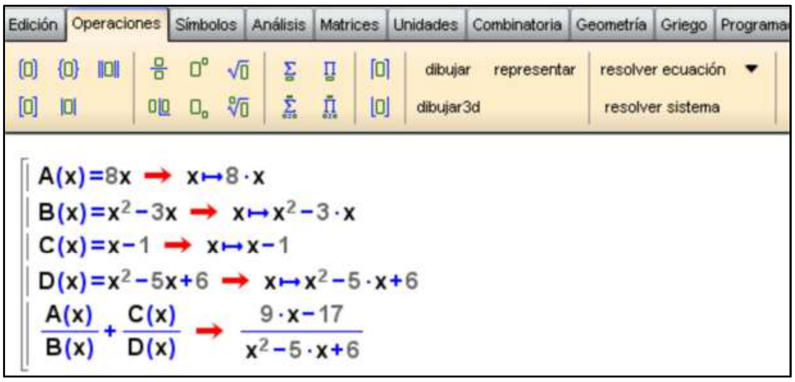
45 Lleva a cabo estas operaciones y comprueba tus resultados con Wiris:

a. $\dfrac{\mathbf{8}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}}+\dfrac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}=\dfrac{8x}{x\cdot(x-3)}+\dfrac{x-1}{(x-3)\cdot(x-2)}$

m.c.m. $[x\cdot(x-3),\ (x-3)\cdot(x-2)]=x\cdot(x-3)\cdot(x-2)$

$$\frac{8x}{x\cdot(x-3)}+\frac{x-1}{(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{8x\cdot(x-2)+(x-1)\cdot x}{x\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{8x^2-16x+x^2-x}{x\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{9x^2-17x}{x\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{9x-17}{x^2-2x-3x+6}=\frac{9x-17}{x^2-5x+6}$$

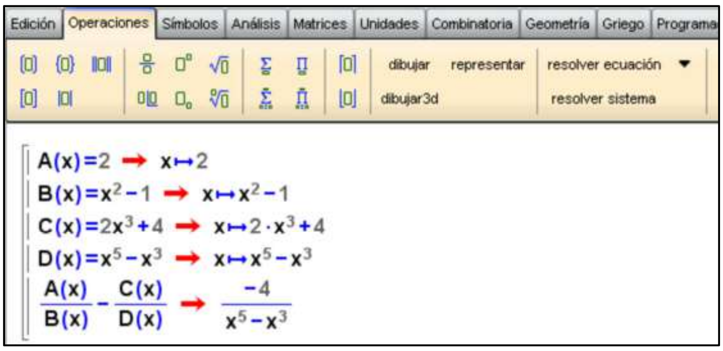


b. $\dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}-\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}=\dfrac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}-\dfrac{2x^3+4}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$

m.c.m. $[(x-1)\cdot(x+1),\ x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)]=x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$$\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{2x^3+4}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2x^3-(2x^3+4)}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2x^3-2x^3-4}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=-\frac{4}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-4}{x^5-x^3}$$

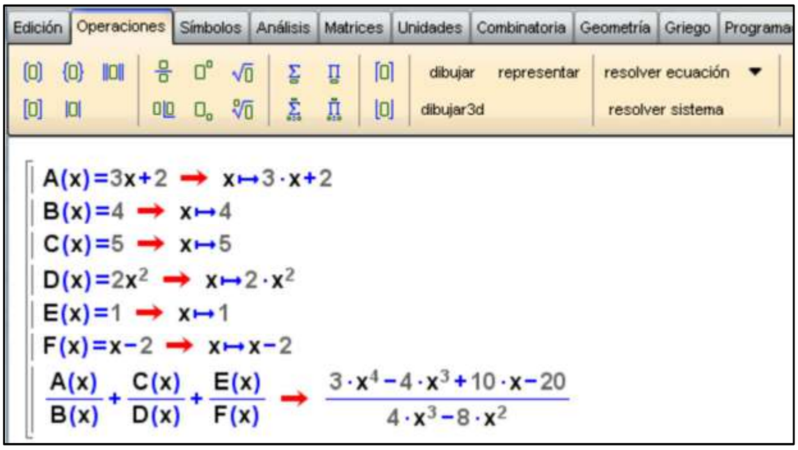


c. $\dfrac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{4}}+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2x^2}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-2}}$

m.c.m $[4, 2x^2, x-2] = 2^2 \cdot x^2 \cdot (x-2) = 4x^2 \cdot (x-2)$

$$\frac{3x+2}{4}+\frac{5}{2x^2}+\frac{1}{x-2}=\frac{(3x+2)\cdot x^2\cdot(x-2)+5\cdot 2\cdot(x-2)+4x^2}{4x^2\cdot(x-2)}=$$

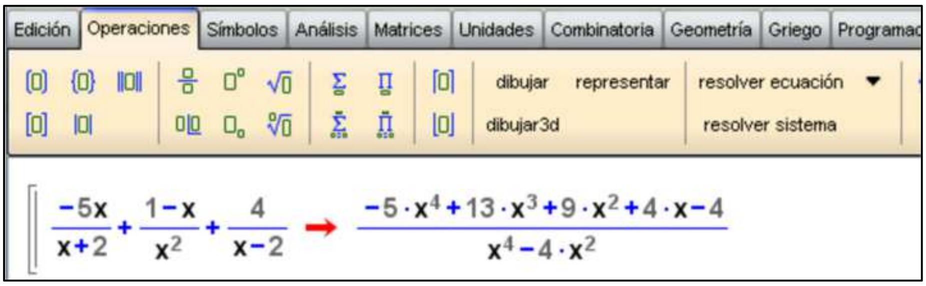
$$=\frac{3x^4-4x^3-4x^2+10x-20+4x^2}{4x^3-8x^2}=\frac{3x^4-4x^3+10x-20}{4x^3-8x^2}$$



d. $\dfrac{\mathbf{-5x}}{\mathbf{x+2}}+\dfrac{\mathbf{1-x}}{\mathbf{x^2}}+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{x-2}}$

$$\frac{-5x}{x+2}+\frac{1-x}{x^2}+\frac{4}{x-2}=\frac{-5x\cdot x^2\cdot(x-2)+(1-x)\cdot(x+2)\cdot(x-2)+4\cdot(x+2)\cdot x^2}{(x+2)\cdot x^2\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{-5x^4+13x^3+9x^2+4x-4}{x^2\cdot(x^2-4)}=\frac{-5x^4+13x^3+9x^2+4x-4}{x^4-4x^2}$$



46 Efectúa las multiplicaciones y divisiones indicadas. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $\dfrac{\mathbf{x^2+x-12}}{\mathbf{x-1}}\cdot\dfrac{\mathbf{5x-5}}{\mathbf{x+4}}=\dfrac{(x-3)\cdot(x+4)\cdot 5\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+4)}=5\cdot(x-3)=5x-15$

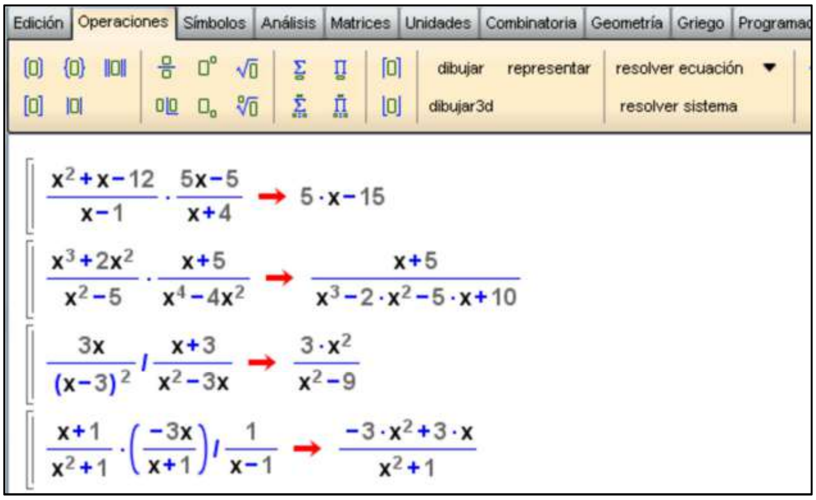
b. $\dfrac{\mathbf{x^3+2x^2}}{\mathbf{x^2-5}}\cdot\dfrac{\mathbf{x+5}}{\mathbf{x^4-4x^2}}=\dfrac{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+5)}{(x^2-5)\cdot x^2\cdot(x^2-4)}=\dfrac{\cancel{(x+2)}\cdot(x+5)}{(x^2-5)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}=$

$$=\frac{x+5}{x^3-2x^2-5x+10}$$

c. $\dfrac{\mathbf{3x}}{\mathbf{(x-3)^2}}:\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x^2-3x}}=\dfrac{3x}{(x-3)^2}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x+3}=\dfrac{3x\cdot x\cdot(x-3)}{(x-3)^2\cdot(x+3)}=\dfrac{3x^2}{(x-3)\cdot(x+3)}$

$=\dfrac{3x^2}{(x^2-9)}$

d. $\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+1}}\cdot\left(\dfrac{\mathbf{-3x}}{\mathbf{x+1}}\right):\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}}=\dfrac{x+1}{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{-3x}{x+1}\right)\cdot(x-1)=\dfrac{-3x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+1)\cdot(x+1)}=\dfrac{-3x^2+3x}{x^2+1}$



47 Opera y simplifica todo lo posible. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $\dfrac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x-3}}\cdot\dfrac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{x+1}}-\dfrac{\mathbf{3x-5}}{\mathbf{x^2-2x-3}}=\dfrac{2x^2-8x}{(x-3)\cdot(x+1)}-\dfrac{3x-5}{x^2-2x-3}=$

$=\dfrac{2x^2-8x}{x^2-2x-3}-\dfrac{3x-5}{x^2-2x-3}=\dfrac{2x^2-8x-3x+5}{x^2-2x-3}=\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-2x-3}$

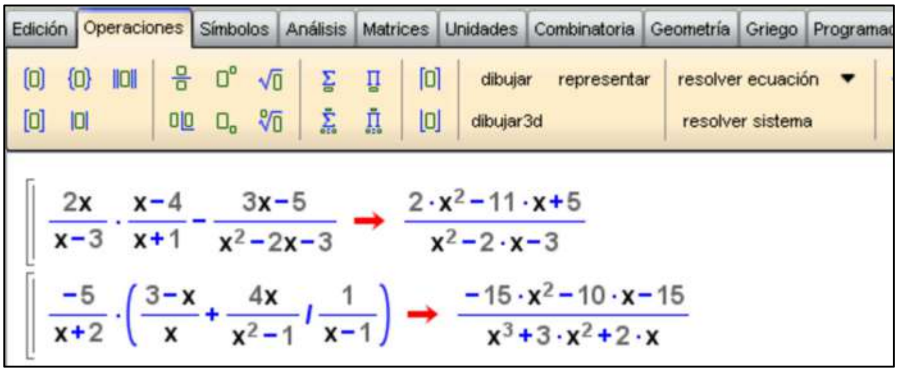
b. $\dfrac{\mathbf{-5}}{\mathbf{x+2}}\cdot\left(\dfrac{\mathbf{3-x}}{\mathbf{x}}+\dfrac{\mathbf{4x}}{\mathbf{x^2-1}}:\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}}\right)$

m.c.m. [x, $(x+1)\cdot(x-1)$] = $x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

$\dfrac{-5}{x+2}\cdot\left(\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{4x}{x^2-1}:\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{-5}{x+2}\cdot\left(\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{4x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)=\dfrac{-5}{x+2}\cdot\left(\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{4x}{x+1}\right)=$

$=\dfrac{-5}{x+2}\cdot\left(\dfrac{(3-x)\cdot(x+1)+4x^2}{x\cdot(x+1)}\right)=\dfrac{-5}{x+2}\cdot\left(\dfrac{3x+3-x^2-x+4x^2}{x^2+x)}\right)=\dfrac{-5}{x+2}\cdot\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+x}=$

$=\dfrac{-15x^2-10x-15}{x^3+3x^2+2x}$



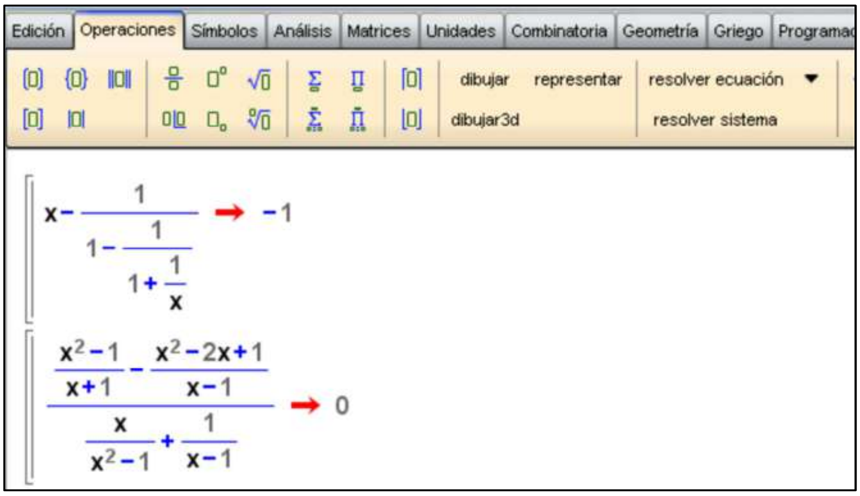
48 Simplifica las expresiones y comprueba tus resultados con Wiris.

a. $$\boldsymbol{x-\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = x-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = x-\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}} = x-\frac{1}{\frac{(x+1)-x}{x+1}} = x-\frac{1}{\frac{1}{x+1}} =$$

$$= x-(x+1) = -1$$

b. $$\boldsymbol{\frac{\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{x^2-2x+1}{x-1}}{\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}}} = \frac{\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)}}{\frac{x+(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}} = \frac{(x-1)-(x-1)}{\frac{2x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}} =$$

$$= \frac{0}{\frac{2x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}} = \frac{0}{(2x+1)} = 0$$



49 Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas para repasar los conceptos estudiados en la unidad:

http://conteni2.educarex.es/mats/11823/contenido

Respuesta abierta.

EVALUACIÓN

1 Al dividir $4x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 6$ entre $2x^2 - x + 3$, el cociente y el resto resultantes son:

a. c (x) = $-2x^3 + 3x + 1$ y r (x) = $-3x - 9$

b. c (x) = $2x^3 - 3x - 1$ y r (x) = $3x + 9$

c. c (x) = $2x^3 + 2x^2 - 3x^2 + x$ y r (x) = $3x + 9$

d. c (x) = $-2x^3 + 3x + 1$ y r (x) = $3x + 9$

$$
\begin{array}{rl}
4x^5 - 2x^4 \quad + \quad x^2 - 5x + 6 & \underline{|\,2x^2 - x + 3} \\
\underline{-4x^5 + 2x^4 - 6x^3 \qquad\qquad} & 2x^3 - 3x - 1 \\
-6x^3 + x^2 - 5x + 6 & \\
\underline{+6x^3 - 3x^2 + 9x \qquad} & \\
-2x^2 + 4x + 6 & \\
\underline{2x^2 - x + 3} & \\
3x + 9 &
\end{array}
$$

2 El resto de la división ($-3x^4 + 7x^2 - x + 10$) : ($x + 2$) es:

a. –8 **b. –12** **c. 24** **d. –128**

Se aplica el teorema del resto a la raíz $x = -2$

P (–2) = $-3 \cdot (-2)^4 + 7 \cdot (-2)^2 - (-2) + 10 = -8$

3 Del polinomio P (x) = $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x$, el número que no es una de sus raíces es:

a. –2 b. –1 **c. 0** **d. 4**

P (–1) = $(-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) = -10$, es decir, x = –1 no es una raíz del polinomio.

4 La factorización del polinomio $2x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 3x^2$ es:

a. $\mathbf{x^2 \cdot (x-3) \cdot (x+1) \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)}$

c. $\mathbf{2x^2 \cdot (x-3) \cdot (x+1) \cdot (x+2)}$

b. $\mathbf{(x-3) \cdot (x+1) \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)}$

d. $2x^2 \cdot (x-3) \cdot (x+1) \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)$

$2x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 8x - 3) = x^2 \cdot$

Se debe factorizar el polinomio $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$:

Sus raíces deben ser divisoras del término independiente, –3

	2	–3	–8	–3
–1		–2	5	3
	2	–5	–3	0

Una de las raíces es $x = -1$

	2	–5	–3
3		6	3
	2	1	0

Otra raíz es $x = 3$

El producto de factores es: $x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (2x + 1) =$

$= 2x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + \frac{1}{2})$

5 La simplificación de la fracción $\mathbf{\frac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x}}$ es:

a. $\mathbf{\frac{x-2}{x+2}}$ **b.** $\mathbf{x}$ c. $\frac{x^2 - 2x}{x+2}$ **d.** $\mathbf{\frac{x-2}{x^2+2x}}$

$$\frac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot (x^2 + 4x + 4)} = \frac{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot (x+2)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x+2)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+2)}$$

6 Considera esta operación: $\mathbf{\dfrac{4x}{x^2-2x-3}:\dfrac{2x-6}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-6x+9}}$**. El resultado es:**

a. $\dfrac{2x+1}{x^2-6x+9}$

b. $\mathbf{\dfrac{x^2-6x+9}{2x+1}}$

c. $\mathbf{\dfrac{8x^3-48x^2+73x+1}{x^3-5x^2+3x+9}}$

d. $\mathbf{\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{8x^3-48x^2+73x+1}}$

$$\frac{4x}{x^2-2x-3}:\frac{2x-6}{x+1}+\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{4x\cdot(x+1)}{2\cdot(x^2-2x-3)\cdot(x-3)}+\frac{1}{x^2-6x+9}=$$

$$=\frac{4x\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x-3)}+\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{4x\cdot(x+1)+2\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)\cdot(x-3)^2}=$$

$$=\frac{(4x+2)}{2\cdot(x-3)^2}=\frac{2\cdot(2x+1)}{2\cdot(x-3)^2}=\frac{2x+1}{(x-3)^2}=\frac{2x+1}{x^2-6x+9}$$