

## TEMA 5 – FUNCIONES ELEMENTALES II

### Rectas

**EJERCICIO 1 .** Halla la pendiente, la ordenada en el origen y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta  $5x - 6y + 2 = 0$ . Representácala gráficamente.

*Solución:*

- Para calcular la pendiente, despejamos la  $y$ :

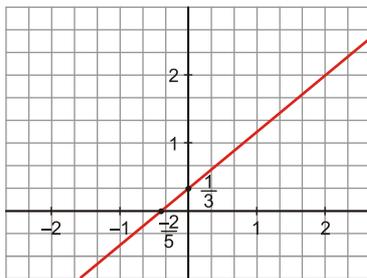
$$5x - 6y + 2 = 0 \rightarrow 6y = 5x + 2 \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{6} \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{La pendiente es } m = \frac{5}{6}.$$

- La ordenada en el origen es  $n = \frac{1}{3}$ .

- Puntos de corte con los ejes:

— Eje  $Y \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right)$

— Eje  $X \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 5x - 6y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 5x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{Luego } \left(-\frac{2}{5}, 0\right)$



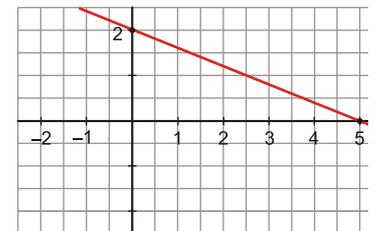
**EJERCICIO 2 :** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a)  $y = -\frac{2}{5}x + 2$       b)  $y = -\frac{3}{2}$       c)  $y = \frac{5}{3}x$

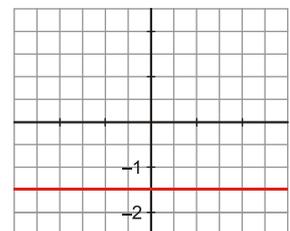
*Solución:*

- a) Hacemos una tabla de valores:

$x$	0	5
$y$	2	0



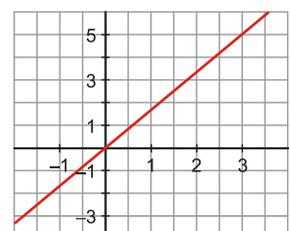
- b)  $y = -\frac{3}{2} \rightarrow$  Es una recta paralela al eje  $X$  que pasa por  $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ .



- c)  $y = \frac{5}{3}x \rightarrow$  Pasa por el  $(0, 0)$ .

Basta dar otro punto para representarla:

Si  $x = 3 \rightarrow y = 5$



**EJERCICIO 3 : Dadas las siguientes rectas, identifica cuáles son paralelas y represéntalas:**

a)  $y = \frac{x+5}{2}$       b)  $y = -\frac{1}{2}$       c)  $2x + 5y = 3$       d)  $2y - x + 3 = 0$

Solución:

Calculamos la pendiente de cada una de ellas:

➤  $y = \frac{x+5}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow m_a = \frac{1}{2}$   
 ➤  $y = -\frac{1}{2} \rightarrow m_b = 0$   
 ➤  $2x + 5y = 3 \rightarrow 5y = 3 - 2x \rightarrow y = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}x \rightarrow m_c = -\frac{2}{5}$   
 ➤  $2y - x + 3 = 0 \rightarrow 2y = x - 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow m_d = \frac{1}{2}$

Son paralelas la a) y la d) por tener la misma pendiente.

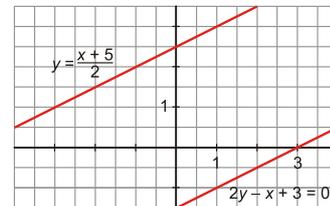
Representamos ambas haciendo una tabla de valores:

a)  $y = \frac{x+5}{2}$

x	1	-1
y	3	2

d)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

x	3	1
y	0	-1



**EJERCICIO 4 : Representa la siguiente recta tomando la escala adecuada en cada eje:  $y = \frac{x}{25} + 3$**

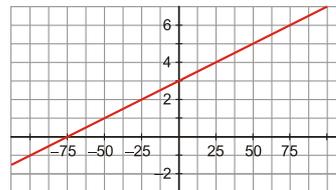
Solución:

Observando que la pendiente de la recta es  $m = \frac{1}{25}$ , lo más adecuado es tomar la escala en el eje X de 25 en 25.

Hagamos una tabla de valores para ver cuál es la escala más adecuada en el eje Y:

En el eje Y, tomamos la escala de 1 en 1.

x	-75	-25	0	25	75
y	0	2	3	4	6



**EJERCICIO 5 : Representa las rectas siguientes:**

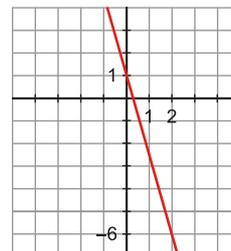
a)  $y = -3,5x + 1$       b)  $y = \frac{5}{4}$       c)  $y = -\frac{7}{2}x$

¿Qué relación hay entre las rectas a) y c)?

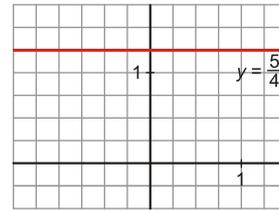
Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	0	2
y	1	-6

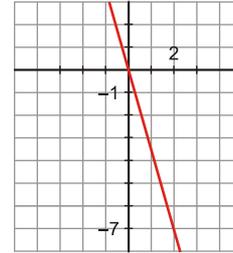


b) Es una recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ .



c)  $y = -\frac{7}{2}x$

$x$	0	2
$y$	0	-7



a) y c) son rectas paralelas, puesto que tienen la misma pendiente,  $m = -3,5$ .

**EJERCICIO 6 :** Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(1, -3)$  y  $B(5, 1)$ . ¿Cuál es la ordenada en el origen?

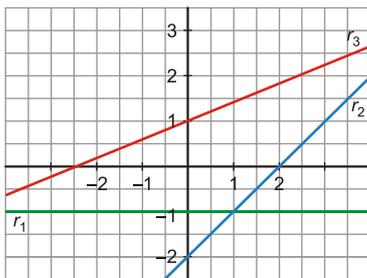
*Solución:*

Empezamos hallando su pendiente:  $m = \frac{1 - (-3)}{5 - 1} = \frac{4}{4} = 1$

Ecuación de la recta que pasa por  $A(1, -3)$  y cuya pendiente es  $m = 1 \rightarrow y + 3 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 4$

La ordenada en el origen es  $n = -4$ .

**EJERCICIO 7 :** Observando las gráficas, indica cuál es la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



*Solución:*

• Para calcular la ordenada en el origen, basta con observar el punto de corte de cada una de las rectas con el eje  $Y$ :  $r_1 \rightarrow n_1 = -1$        $r_2 \rightarrow n_2 = -2$        $r_3 \rightarrow n_3 = 1$

• Calculamos la pendiente de cada una de ellas:

$r_1 \rightarrow m_1 = 0$

$r_2$  pasa por  $(0, -2)$  y  $(2, 0) \rightarrow m_2 = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$

$r_3$  pasa por  $(0, 1)$  y  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow m_3 = \frac{0 - 1}{-\frac{3}{2} - 0} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

• La ecuación de cada recta será:

$r_1 \rightarrow y = -1$        $r_2 \rightarrow y = x - 2$        $r_3 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$

**EJERCICIO 8** : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos  $A(-1, 3)$  y  $B(5, 2)$  y es paralela a la recta  $7x - 2y + 1 = 0$ .

*Solución:*

- Empezamos calculando el punto medio del segmento de extremos  $A(-1, 3)$  y  $B(5, 2)$ :

$$x = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad y = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Punto medio: } P\left(2, \frac{5}{2}\right)$$

- La recta tiene la misma pendiente que  $7x - 2y + 1 = 0$  por ser paralelas:

$$2y = 7x + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{7}{2}$$

- Ecuación de la recta pedida:

$$y = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}(x - 2) \quad (\text{Ecuación en la forma punto-pendiente}) \Rightarrow y = \frac{7}{2}x - \frac{14}{2} + \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}$$

**EJERCICIO 9** : Indica cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $A(0, -1)$  y  $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Escribe su ecuación y la de la paralela a ella que pasa por el origen de coordenadas.

*Solución:*

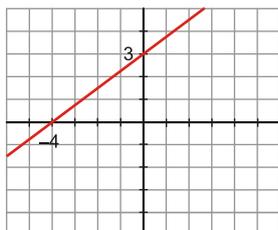
- Pendiente:  $m = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

- Observamos que los puntos que nos dan son los puntos de corte con los ejes; concretamente, de  $A(0, -1)$  se obtiene que  $n = -1$ .

Así, la ecuación de la recta es:  $y = \frac{2}{3}x - 1$

- La recta paralela a la anterior que pasa por  $(0, 0)$  será:  $y = \frac{2}{3}x$

**EJERCICIO 10** : La gráfica de una función lineal determina con los ejes coordenados el triángulo rectángulo que se vé en la figura. Halla la expresión analítica de dicha función.



*Solución:*

Como corta al eje  $Y$  en  $(0, 3)$ , entonces,  $n = 3$ .

Pendiente:  $m = \frac{3}{4}$

La ecuación de la recta es:  $y = \frac{3}{4}x + 3$

**Parábolas**

**EJERCICIO 11 : Representa gráficamente las siguientes parábolas**

a)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$     b)  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$     c)  $y = 2x^2 - x - 3$     d)  $y = -25x^2 + 75x$     e)  $y = -x^2 + 2x - 1$

Solución:

a)

• Vértice:  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow$  El vértice es  $V(1, -2)$ .

• Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje Y  $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

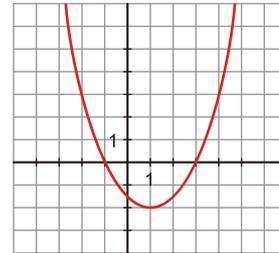
— Con el eje X  $\rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} / 3 \\ \backslash -1 \end{matrix}$

Puntos de corte con el eje X:  $(3, 0)$  y  $(-1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

X	-2	0	1	2	3
Y	5/2	-3/2	-2	-3/2	5/2

• Representación



b)

• Hallamos su vértice:  $x = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot 16 - 8 + 4 = 0 \rightarrow V(4, 0)$

• Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje X  $\rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

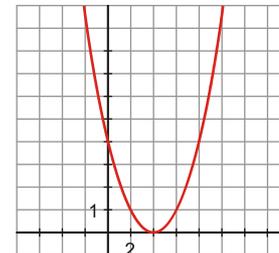
$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow (4, 0)$ , que coincide, lógicamente, con el vértice.

— Con eje Y  $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

• Puntos próximos al vértice:

X	2	3	4	5	6
Y	1	1/4	0	1/4	1

• Representación



c)

• Calculamos su vértice:  $x = \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{16}} = \frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \rightarrow V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

• Puntos de corte con los ejes:

— Con eje Y  $\rightarrow x=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0, -3)$

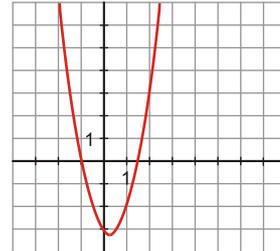
— Con eje X  $\rightarrow y=0 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X son:  $(\frac{3}{2}, 0)$  y  $(-1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

X	-1	0	1/4	1	2
Y	0	-3	-25/8	-2	3

• Representación:



d)

• Hallamos el vértice:  $x = \frac{-75}{-50} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-225}{4} + \frac{225}{2} = \frac{225}{4} \rightarrow V(\frac{3}{2}, \frac{225}{4})$

• Puntos de corte con los ejes:

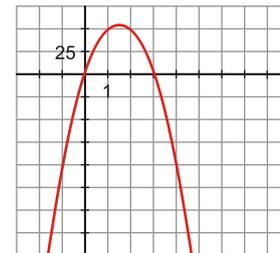
— Con eje Y  $\rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0, 0)$

— Con eje X  $\rightarrow y=0 \Rightarrow -25x^2 + 75x = 0 \rightarrow -25x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0, 0) \\ x=3 \rightarrow (3, 0) \end{cases}$

• Tabla de valores para obtener puntos próximos al vértice:

X	0	1	3/2	2	4
Y	0	50	225/4	50	-100

• Representación:



e)

• Hallamos su vértice:  $x = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y = -1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow V(1, 0)$

• Puntos de corte con los ejes:

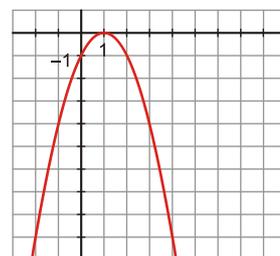
— Con eje Y  $\rightarrow x=0 \rightarrow y=-1 \rightarrow (0, -1)$

— Con eje X  $\rightarrow$  el único punto de corte será el vértice:  $(1, 0)$

• Puntos próximos al vértice:

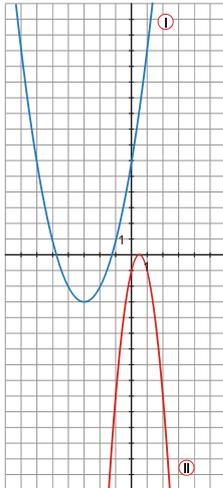
X	-1	0	1	2	3
Y	-4	-1	0	-1	-4

• Representación:

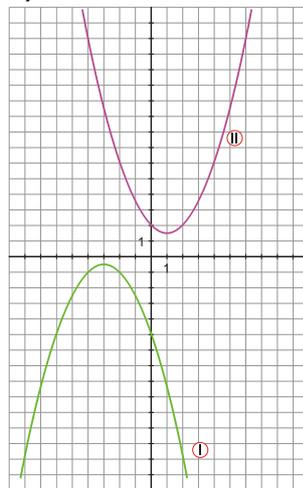


**EJERCICIO 12 : Halla las expresiones analíticas de estas parábolas:**

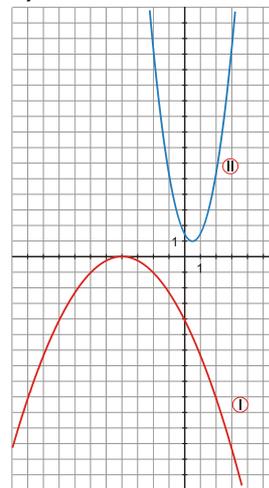
a)



b)



c)



**Solución:**

a) La expresión analítica de ambas parábolas será de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b, c$  son números reales que tenemos que calcular a partir de las gráficas.

• Ecuación de la parábola I:

— Punto de corte con el eje  $Y$ :  $(0, 6) \rightarrow c = 6$

— Vértice:  $V(-3, -3)$ , que además es un punto de la parábola.

$$\text{Así: } \left. \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -3 = (-3)^2 a + (-3)b + 6 \end{array} \right\} \rightarrow -3 = 9a - 18a + 6 \rightarrow -9 = -9a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 6$$

— La ecuación de la parábola I es:  $y = x^2 + 6x + 6$

• Ecuación de la parábola II:

— Corta al eje  $Y$  en  $(0, -1) \rightarrow c = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ \text{— Vértice } V\left(\frac{1}{2}, 0\right): 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + \frac{1}{2}b - 1 \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a = 1 \rightarrow a - 2a = 4 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$$

— La expresión analítica de la parábola II es:  $y = -4x^2 + 4x - 1$

b) Sus ecuaciones serán de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c$ , números reales.

• Ecuación de la parábola I:

— Corta al eje  $Y$  en el punto  $(0, -5)$ , luego:  $c = -5$

— El vértice es  $V\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ , que así mismo es un punto de la parábola. Luego de aquí obtendremos dos

ecuaciones cuyas incógnitas son  $a$  y  $b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -\frac{1}{2} = (-3)^2 a + (-3)b - 5 \rightarrow -\frac{1}{2} = 9a - 3b - 5 \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{2} = 9a - 18a - 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -9a - 5 \rightarrow -1 = -18a - 10 \rightarrow 9 = -18a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -3$$

— La ecuación de la parábola I es:  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$

• Ecuación de la parábola II:

— Corta al eje Y en (0, 2) →  $c = 2$

$$\left. \begin{aligned} V\left(1, \frac{3}{2}\right) &\rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a \\ \frac{3}{2} &= a + b + 2 \rightarrow a + b = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a - 2a &= -\frac{1}{2} \rightarrow -a = -\frac{1}{2} \\ a &= \frac{1}{2} & b &= -1 \end{aligned}$$

— La ecuación de la parábola II es:  $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

c) Observamos que ambas son parábolas, luego sus ecuaciones serán de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b, c$  son números reales.

• Ecuación de la parábola I:

—  $c = -4$  porque pasa por (0, -4).

— Vértice  $V(-4, 0)$ , de donde sacamos dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= -4 \rightarrow b = 8a \\ 0 &= 16a - 4b - 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow 16a - 32a = 4 \rightarrow -16a = 4 \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow b = -2$$

— La ecuación de la parábola I es:  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 4$

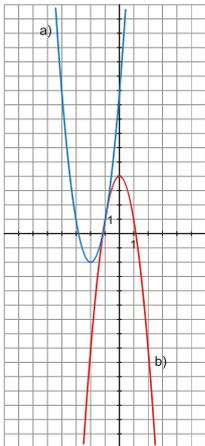
• Ecuación de la parábola II:

—  $c = \frac{3}{2}$  porque pasa por  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .

$$\left. \begin{aligned} V\left(\frac{1}{2}, 1\right) &\rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 1 &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \rightarrow 4 = a + 2b + 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow -2 = -a \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -2$$

— La ecuación de la parábola II es:  $y = 2x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

**EJERCICIO 13 : Completa las expresiones de estas dos gráficas:**



a)  $y = \square x^2 + 12x + \square$

b)  $y = \square x^2 + \square$

**Solución:**

• Parábola a)

Punto de corte con el eje Y: (0, 10) →  $c = 10$

$$\left. \begin{aligned} V(-2, -2) \\ b = 12 \end{aligned} \right\} \frac{-b}{2a} = -2 \rightarrow -12 = -4a \rightarrow a = 3$$

Ecuación de a):  $y = 3x^2 + 12x + 10$

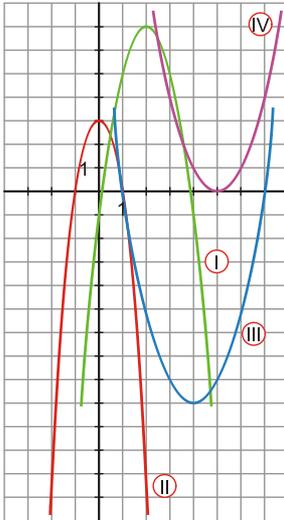
• Parábola b)

$c = 4$  → la ecuación será de la forma  $y = ax^2 + 4$ . Un punto de la parábola es el (1, 1), así:

$$1 = a + 4 \rightarrow a = -3$$

La ecuación buscada es:  $y = -3x^2 + 4$

**EJERCICIO 14 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:**

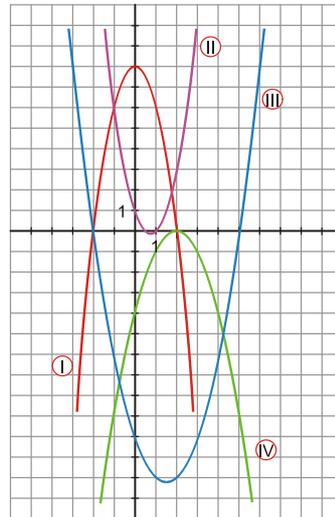


- a)  $y = (x - 5)^2$
- b)  $y = -2x^2 + 8x - 1$
- c)  $y = -4x^2 + 4$
- d)  $y = x^2 - 8x + 7$

Solución: a) → IV      b) → I      c) → II      d) → III

**EJERCICIO 15 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:**

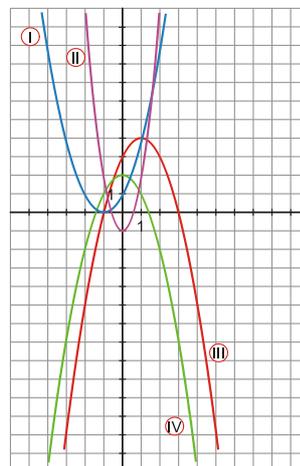
- a)  $y = -2x^2 + 8$
- b)  $y = x^2 - 3x - 10$
- c)  $y = -(x - 2)^2$
- d)  $y = 2x^2 - 3x + 1$



Solución: a) → I      b) → III      c) → IV      d) → II

**EJERCICIO 16 : Relaciona cada gráfica con una de las siguientes expresiones:**

- a)  $y = -x^2 + 2x + 3$
- b)  $y = (x + 1)^2$
- c)  $y = 3x^2 - 1$
- d)  $y = 2 - x^2$



Solución: a) → III      b) → I      c) → II      d) → IV

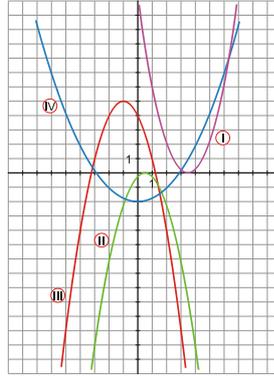
**EJERCICIO 17 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:**

a)  $y = -x^2 - 2x + 4$

b)  $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c)  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

d)  $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$



Solución: a) → III      b) → II      c) → IV      d) → I

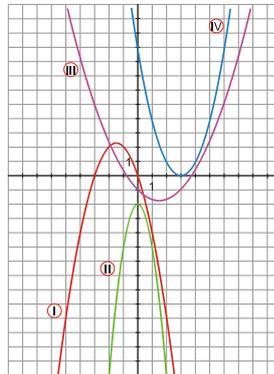
**EJERCICIO 18 : Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:**

a)  $y = -x^2 - 3x$

b)  $y = (x - 3)^2$

c)  $y = -2 - 3x^2$

d)  $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$



Solución: a) → I      b) → IV      c) → II      d) → III

**Rectas y parábolas**

**EJERCICIO 19 : Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas siguientes:**

a)  $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

Solución:

a)

Resolución analítica: Despejamos  $y$  de cada ecuación e igualamos:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$$

Si  $x = -4 \rightarrow y = 1 + 4 = 5$

Si  $x = 1 \rightarrow y = 0$

Las soluciones son:  $x = -4, y = 5$  ;  $x = 1, y = 0$

Resolución gráfica

• Representamos la parábola  $y = x^2 + 2x - 3$ :

— Vértice:  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

— Cortes con los ejes:

Eje Y  $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

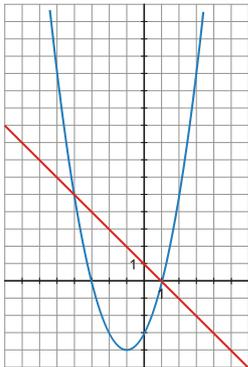
$$\text{Eje X} \rightarrow y=0 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} / \\ -3 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} (1, 0) \text{ y } (-3, 0)$$

— Valores en torno al vértice:

X	-4	-2	-1	0	2
Y	5	-3	-4	-3	5

- Representamos la recta  $y = 1 - x$ :

x	1	0
y	0	1



Observamos en la gráfica que la parábola y la recta se cortan en  $(-4, 5)$  y  $(1, 0)$ .

b)

Resolución analítica: Despejamos  $y$  de cada ecuación e igualamos:

$$\left. \begin{matrix} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = \frac{x-3}{3} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x^2 - 4x + 5 = \frac{x-3}{3} \\ 3x^2 - 12x + 15 = x - 3 \rightarrow 3x^2 - 13x + 18 = 0 \end{matrix}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 216}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{-47}}{6} \Rightarrow \text{El sistema no tiene solución.}$$

Resolución gráfica

- Representamos la parábola  $y = x^2 - 4x + 5$ :

— Vértice:  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 5 = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

— Puntos de corte con los ejes:

Con el eje Y  $\rightarrow x=0 \rightarrow y=5 \rightarrow (0, 5)$

Con el eje X  $\rightarrow y=0 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow$

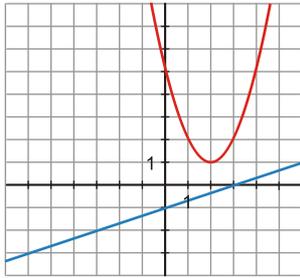
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \text{La parábola no corta al eje X.}$$

— Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	5	2	2	2	5

- Representamos la recta  $y = \frac{x-3}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x - 1$ .

x	0	3
y	-1	0



Se observa en la gráfica que la parábola y la recta no se cortan.

c)

Resolución analítica : Se despeja  $y$  de cada ecuación y se igualan:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 8x - 11 = -3 \\ -2x^2 + 8x - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 8x - 8 = 0 \\ -x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \text{La solución del sistema es: } x = 2, \quad y = -3$$

Resolución gráfica

- Se representa la parábola  $y = -2x^2 + 8x - 11$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{--- Vértice: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ y = -8 + 16 - 11 = -3 \end{array} \right\} V(2, -3)$$

--- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -11 \rightarrow (0, -11)$

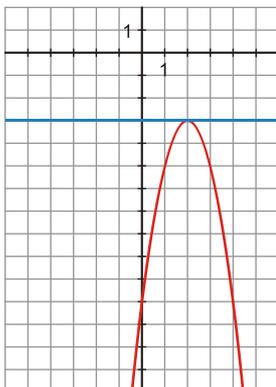
Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x - 11 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 88}}{-4} = \frac{-8 \pm \sqrt{-24}}{-4} \rightarrow \text{No corta al eje } X.$$

--- Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	-11	-5	-3	-5	-11

- Por otro lado, se representa la recta  $y = -3$ , constante.



Hay un único punto de corte entre la recta y la parábola, que corresponde al punto  $(2, -3)$ .

**Funciones a trozos**

**EJERCICIO 20 : Representa las funciones cuyas expresiones analíticas son:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y &= \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{b) } y &= \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ x-6 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} & \text{c) } y &= \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{si } x \leq 3 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+7 & \text{si } 2 < x < 6 \end{cases} \\
 \text{d) } y &= \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ 5x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{e) } y &= \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 6 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
 \text{f) } y &= \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x < -1 \\ x^2-1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{g) } y &= \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}(4x-4) & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

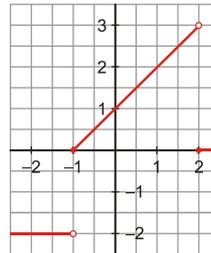
*Solución:*

a)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-2	-1	-1	2	2	3	$+\infty$
Y	-2	-2	-2	0	3	0	0	0

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

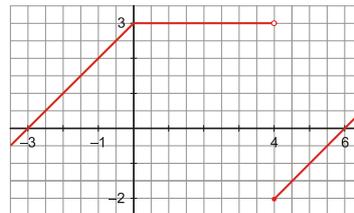


b)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-1	0	0	4	4	5	$+\infty$
Y	$-\infty$	2	3	3	3	-2	-1	$+\infty$

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

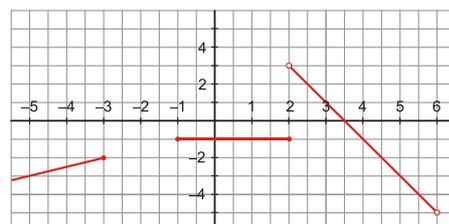


c)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-5	-3	0	2	2	6
Y	$-\infty$	-3	-2	-1	-1	3	-5

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

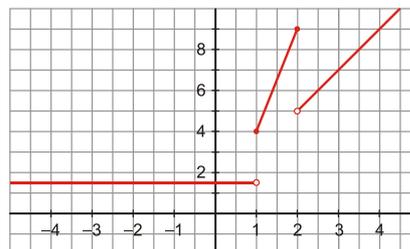


d)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	0	1	1	2	2	3	$+\infty$
Y	1	1	1	4	9	5	7	$+\infty$

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

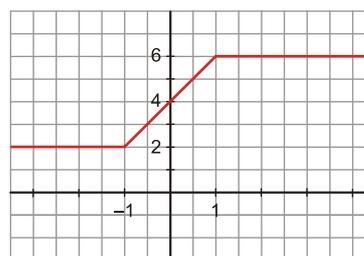


e)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-2	-1	-1	1	1	2	$+\infty$
Y	2	2	2	2	6	6	6	$+\infty$

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

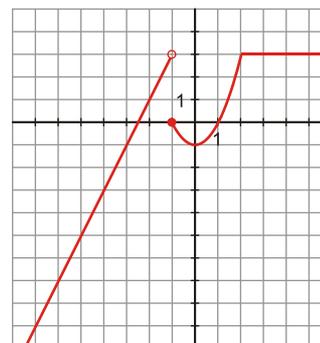


f)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-2	-1	-1	-1/2	0	1	2	2	3	$+\infty$
Y	$-\infty$	1	3	0	-3/4		0	3	3	3	3

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

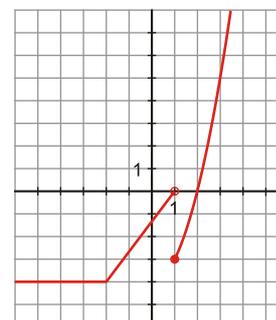


g)

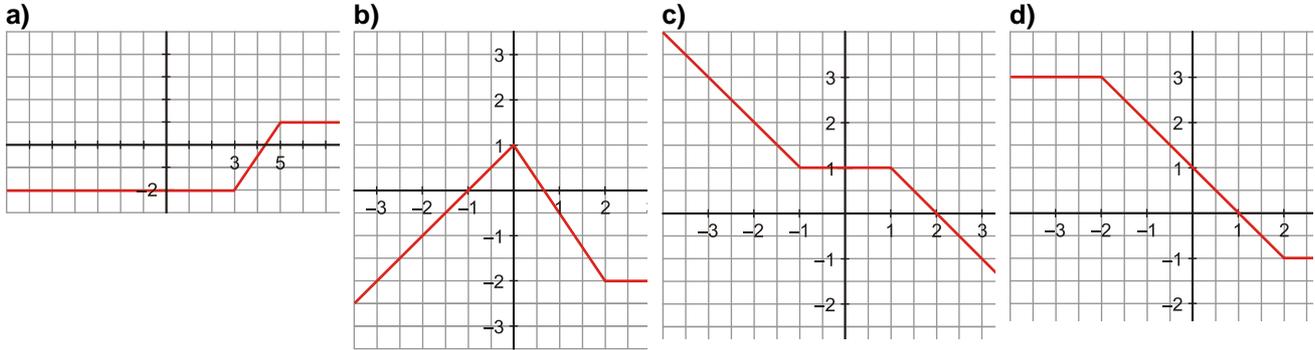
- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

X	$-\infty$	-3	-2	-2	1	1	2	$+\infty$
Y	-4	-4	-4	-4	0	-3	0	$+\infty$

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:



**EJERCICIO 21 : Halla las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:**



Solución:

a)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas que forman la función:

— Para  $x < 3$ , la recta es  $y = -2$ .

— Para  $3 \leq x \leq 5$ , la recta pasa por  $(3, -2)$  y  $(5, 1)$ :

$$m = \frac{3}{2} \rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

— Para  $x > 5$ , la recta es  $y = 1$ .

- Así pues, la expresión analítica de esa función es:  $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

b)

- De cada tramo de la recta, buscamos la ecuación:

— Para  $x < 0$ , la recta pasa por  $(-1, 0)$  y  $(-3, -2)$ :  $m = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y = x + 1$

— Si  $0 \leq x \leq 2$ , la recta pasa por  $(0, 1)$  y  $(2, -2)$ :  $m = \frac{-3}{2} \rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}x \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 1$

— Para  $x > 2$ , la recta es  $y = -2$ .

- La expresión analítica de la función es:  $y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{3}{2}x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de recta que forman la función:

— Para  $x < -1$ , la recta pasa por los puntos  $(-2, 2)$  y  $(-3, 3)$ :  $m = -1 \rightarrow y = -x$

— Para  $-1 \leq x < 1$ , la recta es  $y = 1$ .

— Para  $x \geq 1$ , la recta pasa por  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$ :  $m = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow y = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 2$

- La expresión analítica pedida es:  $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas observando que hay dos que son constantes:

— Si  $x < -2$ , la recta es  $y = 3$ .

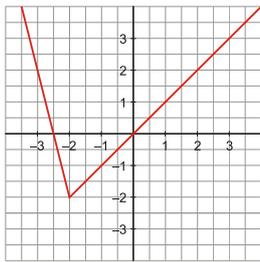
— Si  $x \geq 2$ , la recta es  $y = -1$ .

— Si  $-2 \leq x < 2$ , la recta pasa por los puntos  $(-1, 2)$  y  $(0, 1)$ :

$$m = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow y - 1 = -x \rightarrow y = -x + 1$$

- La expresión analítica de la función es:  $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**EJERCICIO 22 :** Observa la gráfica de la función  $f$ , completa la siguiente tabla de valores y halla su expresión analítica:



$x$	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	3
$y$						

Solución:

- Completamos la tabla observando la gráfica:

$x$	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	3
$y$	2	0	-1	0	1	3

- Para hallar la expresión analítica de la función  $f$ , buscamos la ecuación de cada tramo de recta:

— Si  $x < -2$ , la recta pasa por  $(-3, 2)$  y  $(-\frac{5}{2}, 0)$ :

$$m = \frac{2 - 0}{-3 - (-\frac{5}{2})} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \rightarrow y = -4\left(x + \frac{5}{2}\right) \rightarrow y = -4x - 10$$

— Si  $x \geq -2$ , la recta pasa por  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ :  $m = 1 \rightarrow y = x$

- La expresión analítica de la función  $f$  es:  $y = \begin{cases} -4x - 10 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

### Funciones de proporcionalidad inversa

**EJERCICIO 23 :** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{-3}{x+4}$

b)  $y = \frac{-1}{x-3} - 2$

c)  $y = \frac{-x+7}{x-5}$

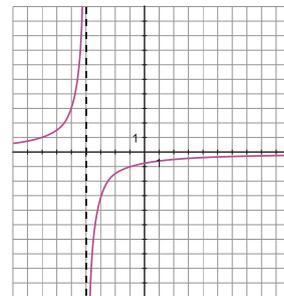
Solución:

a) Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{-4\}$

Tabla de valores

$X$	$-\infty$	-7	-5	$-4^-$	$-4^+$	-3	-1	$+\infty$
$Y$	0	1	3	$+\infty$	$-\infty$	-3	-1	0

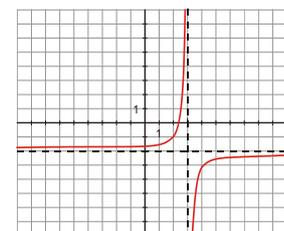
Las asíntotas son la recta  $y = 0$  y la recta  $x = -4$ .



b) Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{3\}$

$X$	$-\infty$	1	2	$3^-$	$3^+$	4	5	$+\infty$
$Y$	-2	-1,5	-1	$+\infty$	$-\infty$	-3	-2,5	-2

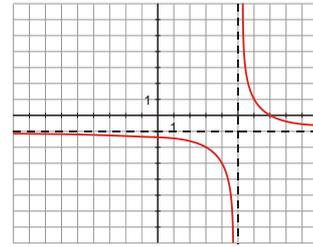
Las asíntotas son las rectas  $x = 3$  e  $y = -2$ .



c)  $y = \frac{-x+7}{x-5} \Rightarrow y = -1 + \frac{2}{x-5}$  Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{5\}$

X	$-\infty$	3	4	$5^-$	$5^+$	6	7	$+\infty$
Y	-1	-2	-3	$-\infty$	$+\infty$	1	0	-1

. Las asíntotas son las rectas  $x = 5$ ,  $y = -1$ .



**Funciones radicales**

**EJERCICIO 24 : Representa gráficamente las siguientes funciones:**

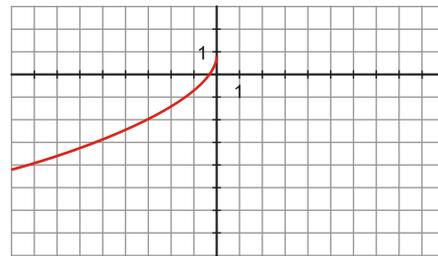
a)  $y = 1 - \sqrt{-3x}$       b)  $y = \sqrt{3x-1}$       c)  $y = \sqrt{2x+3} - 1$

Solución:

a) Dominio de definición:  $(-\infty, 0]$

Hacemos una tabla de valores:

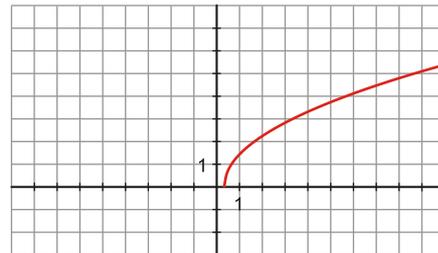
X	$-\infty$	-3	-2	-1	0
Y	$-\infty$	-2	-1,45	-0,73	-11



b) Dominio de definición:  $[\frac{1}{3}, +\infty)$

Hacemos una tabla de valores:

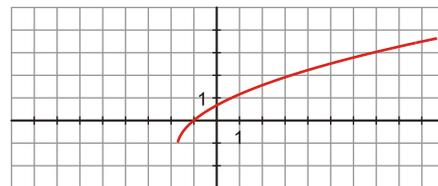
X	1/3	1	2	3	$+\infty$
Y	0	1,41	2,24	2,83	$+\infty$



c) Dominio de definición:  $[-\frac{3}{2}, +\infty)$

Tabla de valores:

X	-3/2	-1	1/2	3	$+\infty$
Y	-1	0	1	2	$+\infty$



**Funciones radicales y de proporcionalidad inversa**

**EJERCICIO 25 : Resuelve gráficamente el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x-2} \\ y = \frac{-2}{x-4} \end{cases}$$

Solución: Representamos gráficamente cada una de las funciones:

- $y = 2\sqrt{x-2}$  → Es una función radical.

— Dominio de definición:  $[2, +\infty)$

— Tabla de valores:

X	2	3	6	11	$+\infty$
Y	-1	2	4	6	$+\infty$

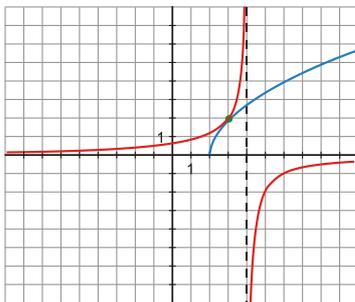
•  $y = \frac{-2}{x-4} \rightarrow$  Es una función de proporcionalidad inversa.

— Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{4\}$

— Tabla de valores:

X	$-\infty$	2	3	$4^-$	$4^+$	5	6	$+\infty$
Y	0	1	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1	0

Las asíntotas son las rectas  $x = 4$ ,  $y = 0$ .



En la gráfica se observa que el sistema tiene una solución:  $x = 3$   $y = 2$

**EJERCICIO 26**

a) De la siguiente hipérbola, di cuál es su dominio, cuáles son sus asíntotas y representala:  $y = -3 + \frac{1}{x}$

b) Halla el valor de k para que el dominio de la función  $y = \sqrt{x-k} + 1$  sea  $[4, +\infty)$ . Haz la representación gráfica.

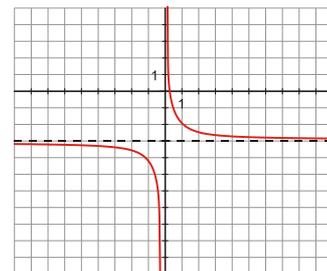
Solución:

a) Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{0\}$

Tabla de valores en puntos próximos a  $x = 0$ :

X	$-\infty$	-2	-1	$0^-$	$0^+$	1	2	$+\infty$
Y	-3	-3,5	-4	$-\infty$	$+\infty$	-2	-2,5	-3

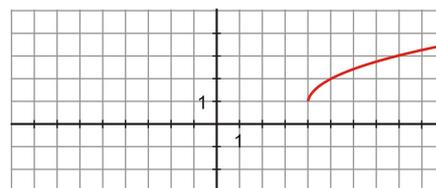
Luego las asíntotas son las rectas  $x = 0$ ,  $y = -3$ .



b) Para que el dominio de definición sean los valores de  $x \geq 4$ , se necesita tomar  $k = 4$  (así,  $x - 4 \geq 0$ ).

Hacemos una tabla de valores

X	4	5	8	13	$+\infty$
Y	1	2	3	4	$+\infty$



**Exponenciales y logarítmicas**

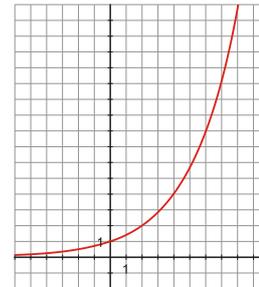
**EJERCICIO 27 :** Representa las siguientes funciones haciendo en cada caso una tabla de valores:

a)  $y = 2^{0,5x}$       b)  $y = -\log_6 x$

Solución:

a)  $y = 2^{0,5x}$  equivale a  $y = 2^{\frac{x}{2}}$

X	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	$+\infty$

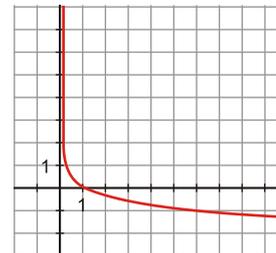


Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que

$$a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1.$$

b)

X	$6^{-\infty}$	$6^{-2}$	$6^{-1}$	$6^0$	$6^1$	$6^2$	$6^{+\infty}$
x	$0^+$	1/36	1/6	1	6	36	$+\infty$
y	$+\infty$	+2	1	0	-1	-2	$-\infty$



**EJERCICIO 28**

a) Pon en forma exponencial  $4^{0,5x}$  y representa la función  $y = 4^{0,5x}$ .

b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de  $y = \log_5 x$  los puntos  $(-1, 2)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(\frac{1}{5}, -1)$ ,  $(3, -2)$  y  $(25, 2)$

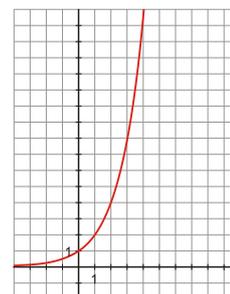
Solución:

a)  $4^{0,5x} = (4^{0,5})^x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x = (\sqrt{4})^x = 2^x$

Representar la función  $y = 4^{0,5x}$  equivale a representar la función  $y = 2^x$ .

Hacemos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	$+\infty$



b) El dominio de definición de  $y = \log_5 x$  es  $(0, +\infty)$ , luego el punto  $(-1, 2)$  no pertenece al dominio por ser  $x = -1 < 0$ . El resto de puntos tienen abscisa positiva, luego pueden pertenecer a la gráfica de la función:

$$\left. \begin{aligned} (5, 1) &\rightarrow 1 = \log_5 5 \rightarrow 5^1 = 5 \\ \left(\frac{1}{5}, -1\right) &\rightarrow -1 = \log_5 \frac{1}{5} \rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \text{Pertenece a la gráfica.}$$

$$(3, -2) \rightarrow -2 = \log_5 3 \rightarrow 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \neq 3 \text{ No pertenece a la gráfica.}$$

$$(25, 2) \rightarrow 2 = \log_5 25 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow \text{Pertenece a la gráfica.}$$

Los puntos que pertenecen a la gráfica son:  $(5, 1)$ ,  $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$  y  $(25, 2)$

**EJERCICIO 29**

a) Halla el valor de  $k$  y  $a$  para que la gráfica de  $y = ka^x$  pase por los puntos  $(-1, 6)$  y  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$ .

Indica razonadamente si la función obtenida será creciente o decreciente, sin representarla.

b) Representa la función  $y = 2 + \log_7 x$ .

Solución:

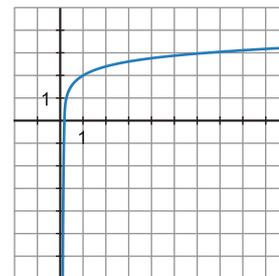
a)  $y = ka^x$  pasa por los puntos  $(-1, 6)$  y  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$ :

$$\left. \begin{aligned} 6 &= ka^{-1} \\ \frac{3}{4} &= ka^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{ka^2}{ka^{-1}} &= \frac{\frac{3}{4}}{6} \rightarrow a^3 = \frac{3}{24} \rightarrow a^3 = \frac{1}{8} \rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow k = 6a \rightarrow k = 6 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

La función es  $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$ , función decreciente por ser  $a = \frac{1}{2} < 1$ .

b)

X	$7^{-\infty}$	$7^{-2}$	$7^{-1}$	$7^0$	$7^1$	$7^2$	$7^{+\infty}$
x	0	1/49	1/7	1	7	49	$+\infty$
y	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$



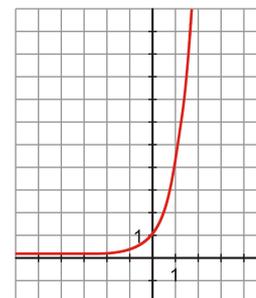
**EJERCICIO 30 :** Escribe el dominio de la función  $y = 4^x$  y represéntala gráficamente. Escribe la expresión analítica y representa la función inversa de  $y = 4^x$ .

Solución:

•  $y = 4^x$  es una función exponencial  $\rightarrow$  su dominio son todos los números reales.

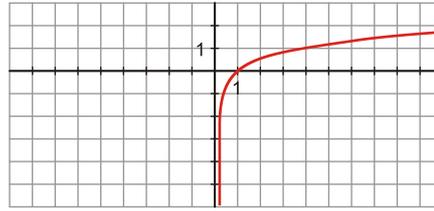
Hagamos una tabla de valores para representarla:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	0	1/16	1/4	1	4	16	$+\infty$



- La expresión analítica de la función inversa de  $y = 4^x$  es  $y = \log_4 x$ , cuya tabla de valores será:

X	0	1/16	1/4	1	4	16	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$



**EJERCICIO 31**

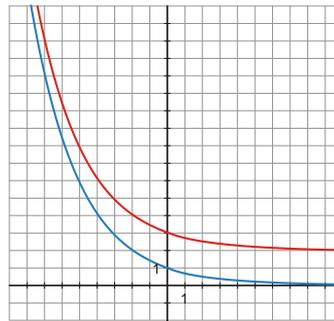
- Construye la gráfica de  $y = 0,7^x$  y, apartir de ella, representa la función  $y = 0,7^x + 2$ .
- Indica cuál es el dominio de la función  $y = \log x$  y escribe tres puntos que pertenezcan a la gráfica.

Solución:

- $y = 0,7^x$ : función exponencial de base  $a = 0,7 < 1$ , luego decrece en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .

- Hagamos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	2,0	1,43	1	0,7	0,49	0



La función  $y = 0,7^x + 2$  se obtiene desplazando dos unidades hacia arriba la gráfica anterior, o lo que es igual, sumando 2 unidades a los valores obtenidos anteriormente para  $y$ .

- $y = \log_{10} x \rightarrow$  dominio de definición:  $(0, +\infty)$   
 $(10, 1) \rightarrow 1 = \log_{10} 10$   
 $(100, 2) \rightarrow 2 = \log_{10} 100 \rightarrow 10^2 = 100$   
 $(\frac{1}{10}, -1) \rightarrow -1 = \log_{10} \frac{1}{10} \rightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10}$

**EJERCICIO 32 : Calcula, usando la definición de logaritmo, y sin calculadora:**

- $\log_3 \sqrt[5]{81}$
- $\log 0,001$
- $\log_4 \frac{1}{64}$
- $\log_5 \frac{1}{25}$
- $\log_5 \sqrt[4]{5}$
- $\log_5 25$
- $\log_7 \sqrt[3]{49}$
- $\log_2 512$
- $\log_5 0,008$
- $\log_2 \sqrt[4]{4}$
- $\log_2 0,5$
- $\log_2 256$
- $\log \sqrt{0,01}$
- $\log_6 \frac{5}{30}$
- $\log_3 243$

Solución:

- $\log_3 \sqrt[5]{81} = \log_3 \sqrt[5]{3^4} = \log_3 3^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \log_3 3 = \frac{4}{5}$
- $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3$
- $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 1 - \log_4 64 = -\log_4 4^3 = -3 \log_4 4 = -3$
- $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = -\log_5 5^2 = -2 \log_5 5 = -2$
- $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_5 5 = \frac{1}{4}$
- $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3$

g) a)  $\log_7 \sqrt[3]{49} = \log_7 \sqrt[3]{7^2} = \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_7 7 = \frac{2}{3}$       h) b)  $\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9 \cdot \log_2 2 = 9$

i) c)  $\log_5 0,008 = \log_5 \frac{8}{1000} = \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3 \log_5 5 = -3$

j) a)  $\log_2 \sqrt[4]{4} = \log_2 \sqrt[4]{2^2} = \log_2 2^{\frac{2}{4}} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

k) b)  $\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \log_2 2 = -1$       l) c)  $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8 \log_2 2 = 8$

m) a)  $\log \sqrt{0,01} = \log \left( \frac{1}{100} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 10^{-2} = -\frac{2}{2} \log 10 = -1$

n) b)  $\log_6 \frac{5}{30} = \log_6 \frac{1}{6} = \log_6 6^{-1} = -1 \log_6 6 = -1$       ñ) c)  $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \cdot \log_3 3 = 5$

**EJERCICIO 33 : Resuelve estas ecuaciones:**

a)  $5^{2x^2+1} = 125$       b)  $\log_3 (5x - 3) = 3$       c)  $2^{2x-6} = 0,25^{x-1}$       d)  $\log_5 (2x^2 - x) = 0$

e)  $\sqrt[5]{49} = 7^{x^2 + \frac{6}{25}}$       f)  $\log_2 (x - 1) = 2$       g)  $3^{3x-1} = 9^{x+6}$       h)  $\log_2 (x^2 - 5x + 8) = 2$

i)  $4^{x^2-8x} = 1$       j)  $\log (11x - 1) = -1$

*Solución:*

a) Expresamos como potencia de 5 el segundo miembro e igualamos los exponentes:

$$5^{2x^2+1} = 125 \rightarrow 5^{2x^2+1} = 5^3 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_3 (5x - 3) = 3 \rightarrow 5x - 3 = 3^3 \rightarrow 5x - 3 = 27 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$$

Comprobación de la solución  $\log_3 (5 \cdot 6 - 3) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \cdot \log_3 3 = 3 \rightarrow$  Solución válida

c) Expresamos el segundo miembro como potencia de 2. A continuación, igualamos exponentes:

$$2^{2x-6} = \left( \frac{1}{4} \right)^{x-1}$$

$$2^{2x-6} = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{x-1} \rightarrow 2^{2x-6} = \left( \frac{1}{2} \right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = (2^{-1})^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = 2^{-2x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 6 = -2x + 2 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

d)  $\log_5 (2x^2 - x) = 0$ , aplicando la definición de logaritmo, equivale a  $2x^2 - x = 5^0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 - x = 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{matrix} / \\ \backslash \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix} = \frac{-1}{2}$$

Comprobación de las soluciones

Si  $x = 1 \rightarrow \log_5 (2 - 1) = \log_5 1 = 0 \rightarrow x = 1$  es solución.

Si  $x = \frac{-1}{2} \rightarrow \log_5 \left( 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \log_5 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \log_5 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$  también es solución.

e) Expresamos el primer miembro como potencia de 7 e igualamos exponentes:

$$\sqrt[5]{49} = 7^{x^2 + \frac{6}{25}} \rightarrow \sqrt[5]{7^2} = 7^{x^2 + \frac{6}{25}} \rightarrow 7^{\frac{2}{5}} = 7^{x^2 + \frac{6}{25}} \rightarrow \frac{2}{5} = x^2 + \frac{6}{25} \rightarrow x^2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \pm \frac{2}{5}$$

f) Aplicando la definición de logaritmo, se obtiene:

$$\log_2 (x - 1) = -2 \rightarrow x - 1 = 2^{-2} \rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} + 1 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Comprobación de la solución:  $\log_2\left(\frac{5}{4}-1\right) = \log_2\frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2 \rightarrow$  válida

La solución es:  $x = \frac{5}{4}$

g) Expresamos como potencia de 3 el segundo miembro e igualamos exponentes:

$$3^{3x-1} = 9^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1} = (3^2)^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1} = 3^{2x+10} \rightarrow 3x-1 = 2x+10 \rightarrow x = 11$$

h)  $\log_2(x^2 - 5x + 8) = 2 \rightarrow x^2 - 5x + 8 = 2^2$  (hemos aplicado la definición de logaritmo)  $\rightarrow$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 8 = 4 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} /4 \\ \backslash 1 \end{matrix}$$

Comprobación de las soluciones

Si  $x = 4 \rightarrow \log_2(16 - 20 + 8) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \rightarrow x = 4$  es solución.

Si  $x = 1 \rightarrow \log_2(1 - 5 + 8) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \rightarrow x = 1$  es solución.

i) a)  $4^{x^2-3x} = 1$  equivale a  $4^{x^2-3x} = 4^0$

Igualando exponentes:  $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0$

Luego  $x = 0$  y  $x = 3$  son las soluciones.

j)  $\log(11x - 1) = -1$  equivale a  $11x - 1 = 10^{-1}$  (hemos aplicado la definición de logaritmo)

$$11x - 1 = \frac{1}{10} \rightarrow 11x = \frac{1}{10} + 1 \rightarrow 11x = \frac{11}{10} \rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$\log\left(\frac{11}{10} - 1\right) = \log\frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1 \log 10 = -1$$

Comprobación de la solución

La solución  $x = \frac{1}{10}$  es válida.

## Problemas

**EJERCICIO 34 :** Colocamos en el banco 25000 € al 5% de interés anual.

- Escribe la función que expresa el capital acumulado en función del tiempo,  $t$ , que permanezca el dinero en el banco.
- ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

*Solución:*

a)  $C =$  capital acumulado

5% de interés anual significa que el capital que hay a principios de año se multiplica por 1,05 al final. La expresión que da el capital acumulado al cabo de  $t$  años es:  $C = 25000 \cdot 1,05^t \quad t \geq 0$

b) Nos piden calcular  $t$  para que el capital se duplique:

$$25000 \cdot 1,05^t = 50000 \rightarrow 1,05^t = 2 \rightarrow t \approx 15 \text{ años}$$

Tardará en duplicarse, aproximadamente, 15 años.

**EJERCICIO 35 :** Se cerca una finca rectangular de área  $A$  con 42 m de alambrada, sin que sobre ni falte nada.

- Expresa el área de la finca en función de uno de sus lados
- Representa gráficamente la expresión anterior.
- ¿Cuál es el dominio de definición?
- ¿Para qué valor de los lados obtenemos la finca de área máxima?

*Solución:*

Las dimensiones de la finca son  $x$ ,  $21 - x$ .

a)  $A =$  área de la finca

La expresión analítica buscada es  $A(x) = x(21 - x) \rightarrow A(x) = -x^2 + 21x$ , que es una función cuadrática.

b) Será una parábola abierta hacia abajo:

$$\bullet \text{ Vértice: } x = \frac{21}{2} \quad y = -\frac{441}{4} + \frac{441}{2} = \frac{441}{4} = 110,25 \Rightarrow V(10,5; 110,25)$$

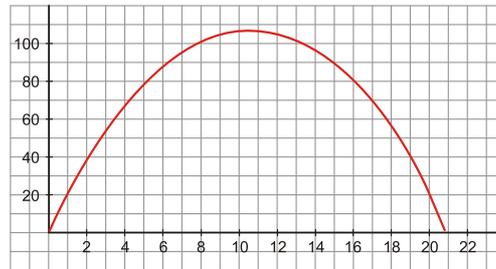
- Puntos de corte con los ejes:

— Eje X  $\rightarrow y=0 \rightarrow -x^2+21x=0 \rightarrow x(-x+21)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=21 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ y } (21,0)$

— Eje Y  $\rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0)$

- Tabla de valores:

X	5	10	10,5	15	20
Y	80	110	110,25	90	20



- c) Por ser  $x$  una longitud y  $A(x)$  un área, la gráfica corresponde solo al primer cuadrante. Dominio de definición:  $(0, 21)$
- d) El área es máxima en el vértice, y mide  $110,25 \text{ m}^2$ . Se obtiene tomando como lados  $x = 10,5 \text{ m}$  y  $21 - 10,5 = 10,5 \text{ m}$  es decir, el área es máxima si la finca es cuadrada.

**EJERCICIO 36 : Expresa el lado de un cuadrado en función de su área. ¿Qué tipo de función obtienes? ¿Cuál es su dominio? Representala gráficamente.**

Solución:

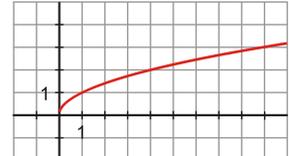
$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow \text{área del cuadrado} \\ l \rightarrow \text{lado del cuadrado} \end{array} \right\} A = l^2 \rightarrow l = \sqrt{A}$$

La función obtenida es una función radical.

Dominio de definición =  $(0, +\infty)$

Para representarla gráficamente, hacemos una tabla de valores:

X	0	1	4	9	$+\infty$
Y	0	1	2	3	$+\infty$



**EJERCICIO 37 : Una central nuclear tiene 1 kg de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada 5 años.**

- a) ¿Qué cantidad de esa sustancia tendremos al cabo de 10 años?
- b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de sustancia radiactiva según los años transcurridos, suponiendo que el ritmo de desintegración se mantiene?

Solución:

- a) Al cabo de 5 años habrá 0,5 kg de sustancia radiactiva, luego al cabo de 10 años habrá  $0,25 \text{ kg} = 250 \text{ g}$  de sustancia radiactiva.
- b) Llamamos  $C =$  cantidad de sustancia radiactiva (kg)  
 $t =$  tiempo (años)

La función que describe el problema es:  $C(t) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \rightarrow C(t) = 0,5^{\frac{t}{5}}$

**EJERCICIO 38 : María se quiere comprar una parcela rectangular que tenga como área  $1\,200 \text{ m}^2$ .**

- a) Escribe la función que da el ancho de la finca en función del largo.
- b) Haz la gráfica correspondiente.

Solución:

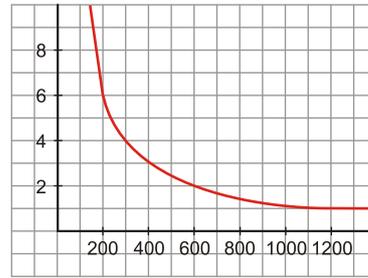
- a) Llamamos  $x \rightarrow$  largo de la finca  
 $y \rightarrow$  ancho de la finca

El área de la finca será  $\rightarrow x \cdot y = 1200 \rightarrow y = \frac{1200}{x}$

b) Puesto que  $x$  e  $y$  son longitudes, ambas han de ser positivas, luego el dominio de definición será  $(0, +\infty)$

Hacemos una tabla de valores para representarla:

X	$0^+$	200	400	600	$+\infty$
Y	$-\infty$	6	3	2	0

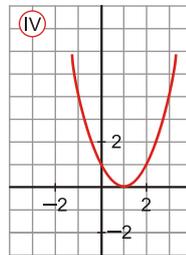
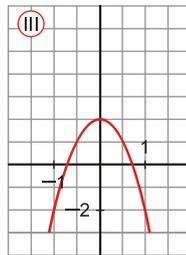
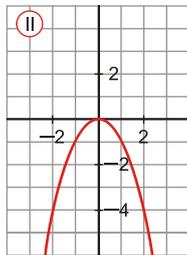
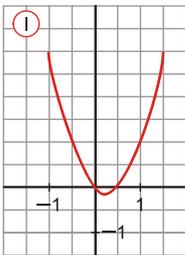


**Recopilación**

**EJERCICIO 39 :**

a) Representa esta función:  $2x + 5y - 2 = 0$

b) Asocia a cada una de las gráficas, una de las siguientes expresiones



1.-  $y = -x^2$

2.-  $y = (x - 1)^2$

3.-  $y = -4x^2 + 2$

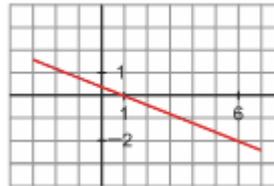
4.-  $y = 2x^2 + x$

Solución:

a)  $2x + 5y - 2 = 0$

Hacemos una tabla de valores:

x	1	6
y	0	-2

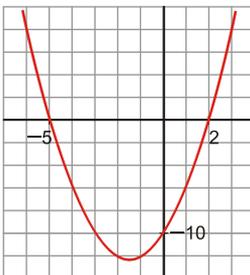


b) 1- II      2- IV      3- III      4- I

**EJERCICIO 40 :**

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 3)$  y  $B(5, -4)$ , y haz su gráfica.

b) Halla la ecuación de la siguiente parábola:

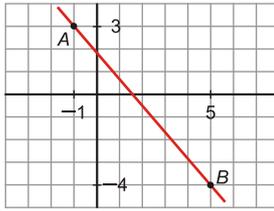


Solución:

a) Calculamos el valor de la pendiente:  $m = \frac{3 + 4}{-1 - 5} = \frac{7}{-6} = -\frac{7}{6}$

La ecuación será de la forma:  $y - 3 = \frac{-7}{6}(x + 1) \rightarrow y = \frac{-7}{6}x + \frac{11}{6}$

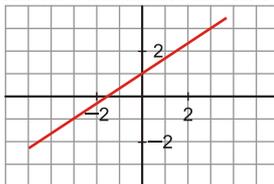
La representación gráfica de la recta  $y = \frac{-7}{6}x + \frac{11}{6}$  es:



- b) Por ser una parábola, su ecuación será de la forma:  $y = ax^2 + bx + c$   
 Por ser el punto de corte con el eje Y el  $(0, -10) \rightarrow c = -10$   
 Para calcular  $a$  y  $b$ , observamos que la parábola pasa por los puntos  $(2, 0)$  y  $(-5, 0)$ :  
 $0 = 4a + 2b - 10 \rightarrow 2a + b = 5$   
 $0 = 25a - 5b - 10 \rightarrow \frac{5a - b = 2}{7a = 7} \rightarrow a = 1$   
 Luego  $b = 5 - 2 = 3 \rightarrow b = 3$   
 Por tanto, la ecuación de la parábola es:  $y = x^2 + 3x - 10$

**EJERCICIO 41 :**

a) Halla la ecuación de la recta representada:



b) Representa esta parábola:  $y = x^2 - 8x - 9$

Solución:

- a) Por ser una recta, su ecuación será de la forma:  $y = mx + n$   
 Como pasa por  $(0, 1) \rightarrow n = 1$

Además,  $(3, 3)$  es un punto de la gráfica  $\rightarrow 3 = 3m + 1 \rightarrow m = \frac{2}{3}$

La ecuación buscada es:  $y = \frac{2}{3}x + 1$

- b) • Calculamos el vértice que tiene la parábola  $y = x^2 - 8x + 9$ :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y = 16 - 32 - 9 = -25 \rightarrow V(4, -25)$$

- Puntos de corte con los ejes:

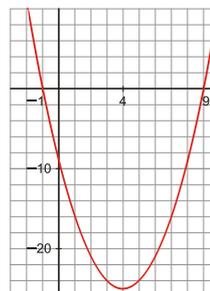
Eje Y  $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

Eje X  $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{matrix} / 9 \\ \backslash -1 \end{matrix}$

La parábola corta al eje X en  $(9, 0)$  y  $(-1, 0)$ .

- Tabla de valores en torno al vértice:

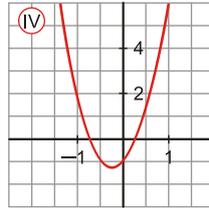
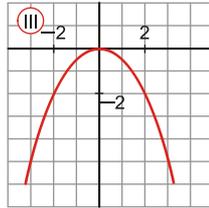
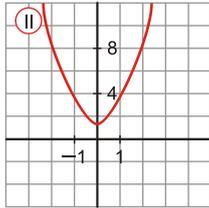
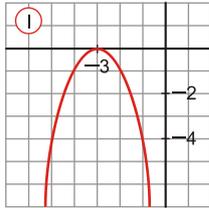
X	1	2	4	5	6
Y	-16	-21	-25	-24	-7



**EJERCICIO 42 :**

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por (1,2) y cuya pendiente es  $m = 2/3$ . Representala gráficamente.

b) Asocia a cada gráfica una de las siguientes expresiones:



1.-  $y = 2x^2 + 1$

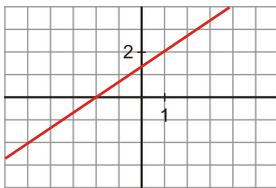
2.-  $y = \frac{-x^2}{2}$

3.-  $y = 5x^2 + 2x - 1$

4.-  $y = -(x + 3)^2$

Solución:

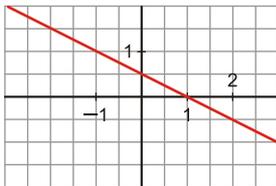
a) Ecuación punto-pendiente:  $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \rightarrow y = 2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$



b) 1 → II      2 → III      3 → IV      4 → I

**EJERCICIO 43 :**

a) Halla la ecuación de la recta dada por la siguiente gráfica:



b) Representa la parábola siguiente:  $y = x^2 - 8x + 12$

Solución:

a) La ecuación de la recta será de la forma:  $y = mx + n$

Por ser el punto de corte con el eje Y  $\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow n = \frac{1}{2}$

Además, la recta pasa por (1, 0), luego:  $0 = m + \frac{1}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la ecuación es:  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b)  $y = x^2 - 8x + 12$

• Vértice  $\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y = 16 - 32 + 12 = -4 \rightarrow V(4, -4)$

• Puntos de corte con los ejes:

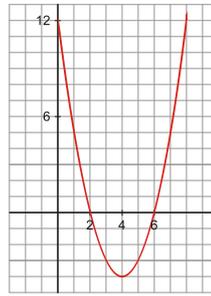
Eje Y  $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow (0, 12)$

Eje X  $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$

Los puntos de corte con el eje X son (6, 0) y (2, 0).

• Tabla de valores en torno al vértice:

X	1	3	4	5	7
Y	5	-3	-4	-3	5



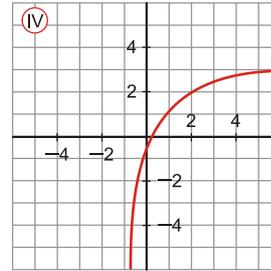
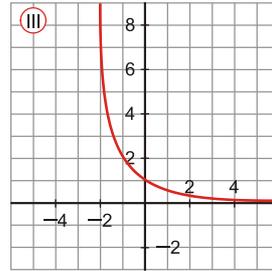
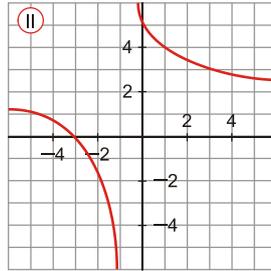
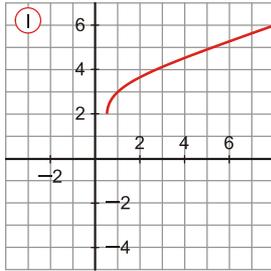
**EJERCICIO 44 :** Asocia cada gráfico con una de estas expresiones:

a)  $y = \frac{4}{x+1} + 2$

b)  $y = \log_2(x+1)$

c)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d)  $y = \sqrt{2x-1} + 2$



Solución: a) II      b) IV      c) III      d) I

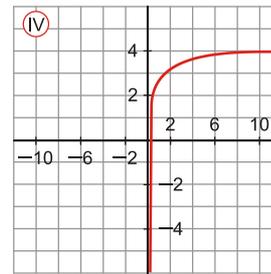
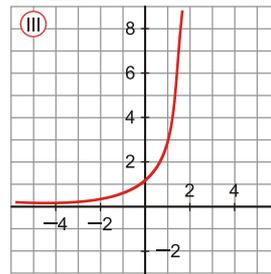
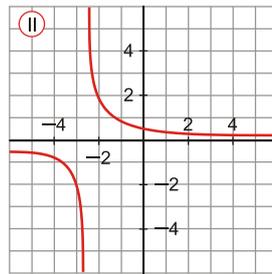
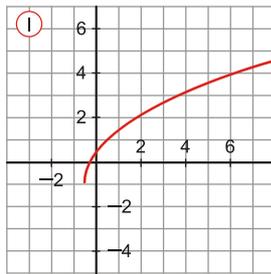
**EJERCICIO 45 :** Asigna a cada gráfica, la expresión que le corresponde:

a)  $y = 3 \cdot 2^x$

b)  $y = 3 + \log x$

c)  $y = \frac{2}{2x+5}$

d)  $y = -1 + \sqrt{4x+2}$



Solución: a) III      b) IV      c) II      d) I

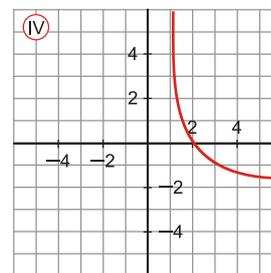
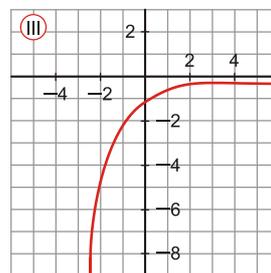
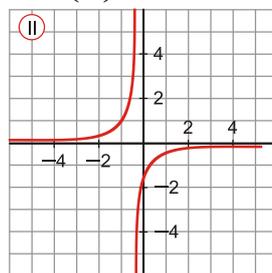
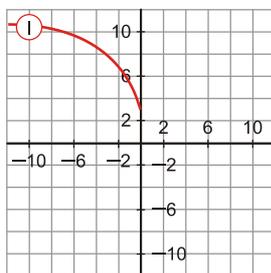
**EJERCICIO 46 :** Relaciona cada gráfica con su expresión correspondiente:

a)  $y = \sqrt{-5x} + 3$

b)  $y = -\left(\frac{4}{9}\right)^x$

c)  $y = -\log_3(x-1)$

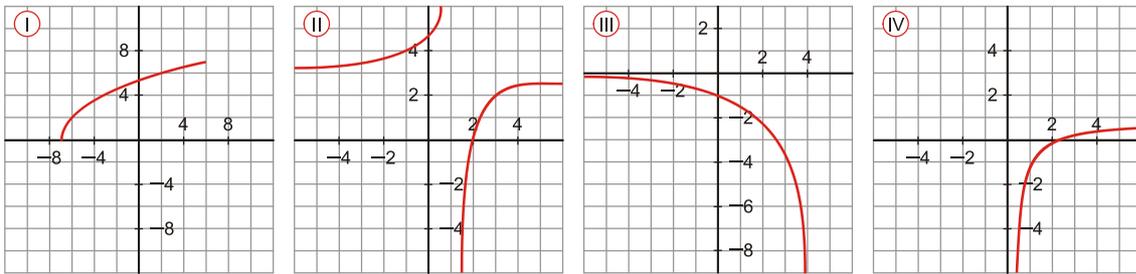
d)  $y = \frac{-1}{4x+1}$



Solución: a) I      b) III      c) IV      d) II

**EJERCICIO 47 : Asocia cada gráfica con una de estas expresiones:**

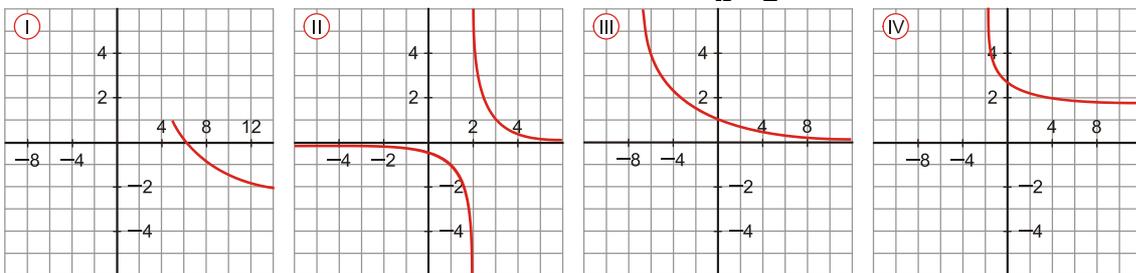
- a)  $y = -1 + \log_5 2x$       b)  $y = -1,7^x$       c)  $y = 2\sqrt{x+7}$       d)  $y = \frac{-2}{x-1} + 3$



Solución: a) IV      b) III      c) I      d) II

**EJERCICIO 48 : Asocia cada gráfica con la expresión que le corresponda:**

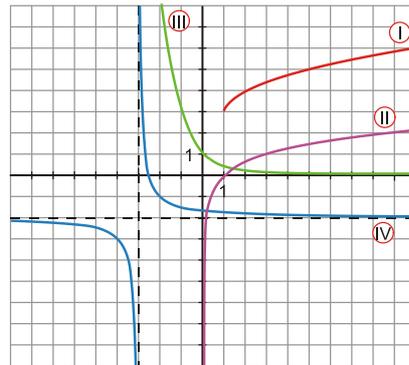
- a)  $y = -0,8^x$       b)  $y = 1 - \sqrt{x-5}$       c)  $y = \frac{1}{x-2}$       d)  $y = 3 - \log_6(x+2)$



Solución: a) III      b) I      c) II      d) IV

**EJERCICIO 49 : Asocia a cada gráfica la expresión que le corresponde:**

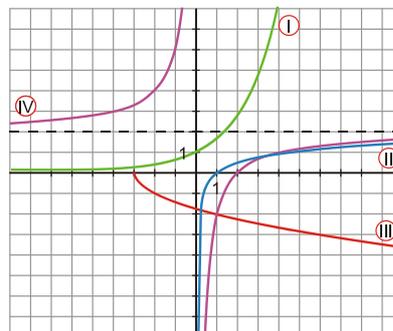
- a)  $y = 3 + \sqrt{x-1}$   
 b)  $y = -2 + \frac{1}{x+3}$   
 c)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$   
 d)  $y = \log_3 x$



Solución: a) → I      b) → IV      c) → III      d) → II

**EJERCICIO 50 : Asocia a cada gráfica una de estas expresiones:**

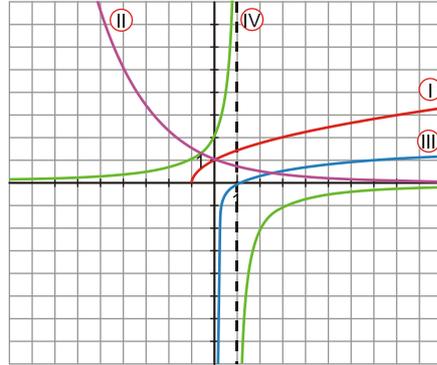
- a)  $y = -\sqrt{x+3}$   
 b)  $y = -\frac{4}{x} + 2$   
 c)  $1,7^x$   
 d)  $y = \log_5 x$



Solución: a) → III      b) → IV      c) → I      d) → II

**EJERCICIO 51 : Asocia a cada gráfica una de las siguientes expresiones:**

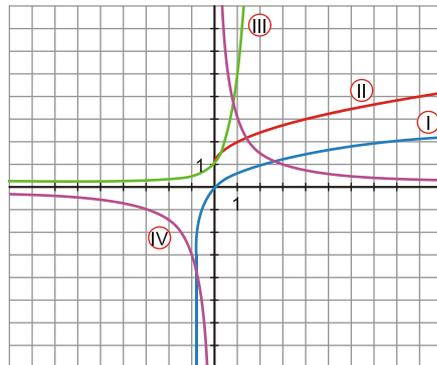
- a)  $y = \log_7 x$
- b)  $y = \sqrt{x+1}$
- c)  $y = \frac{2}{1-x}$
- d)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$



Solución: a) → III      b) → I      c) → IV      d) → II

**EJERCICIO 52 : Asocia a cada gráfica una de estas expresiones:**

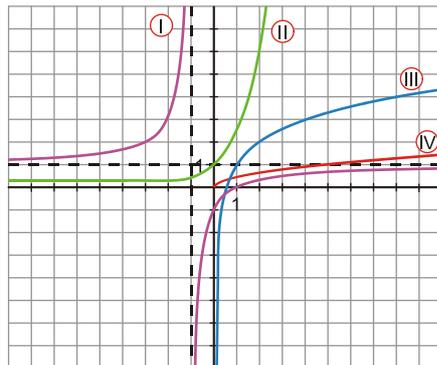
- a)  $y = 1 + \sqrt{x}$
- b)  $y = 5^x$
- c)  $y = \log_3(x+1)$
- d)  $y = \frac{3}{x}$



Solución: a) → II      b) → III      c) → I      d) → IV

**EJERCICIO 53 : Relaciona cada gráfica con la expresión analítica correspondiente:**

- a)  $y = 2,5^x$
- b)  $y = \frac{-2}{x+1} + 1$
- c)  $y = 1 + \log_2 x$
- d)  $y = \sqrt{0,2x}$



Solución: a) → II      b) → I      c) → III      d) → IV