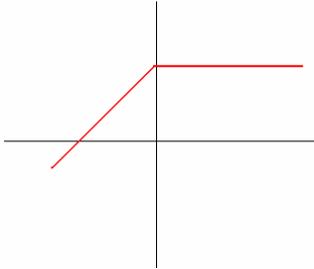


## TEMA 4 – FUNCIONES ELEMENTALES I

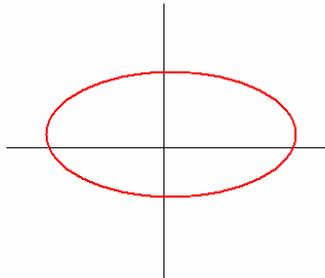
### DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

**EJERCICIO 1 :** Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:

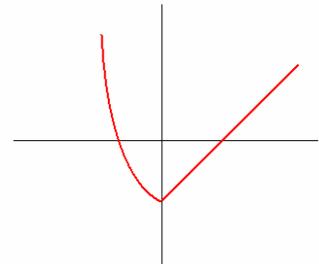
a)



b)



c)



**Solución:**

a) y c) son funciones, porque para cada valor de "x" hay un único valor de "y".

b) no es una función, porque para cada valor de "x" hay dos valores de "y".

### DOMINIO

**EJERCICIO 2 :** Calcular el dominio de las siguientes funciones

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b)  $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

c)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$

d)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

e)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

f)  $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

g)  $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}}$

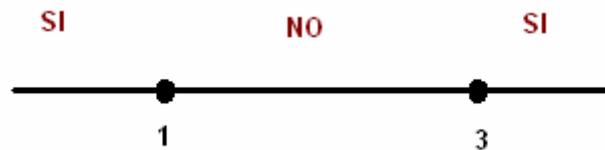
**Solución:**

a)  $D(f) = \mathbb{R}$

b)  $D(f) = \mathbb{R} - \{x / x^2 - 4x + 3 = 0\}$   $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

c)  $D(f) = \mathbb{R}$

d)  $D(f) = \{x / x^2 - 4x + 3 \geq 0\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0$

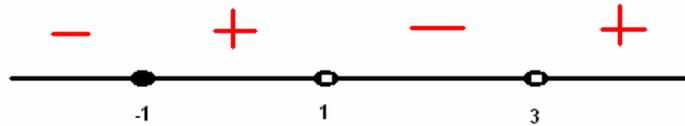


$D(f) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

e)  $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1] \cup [3, +\infty)$

f)  $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ x \notin \{1, 3\} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

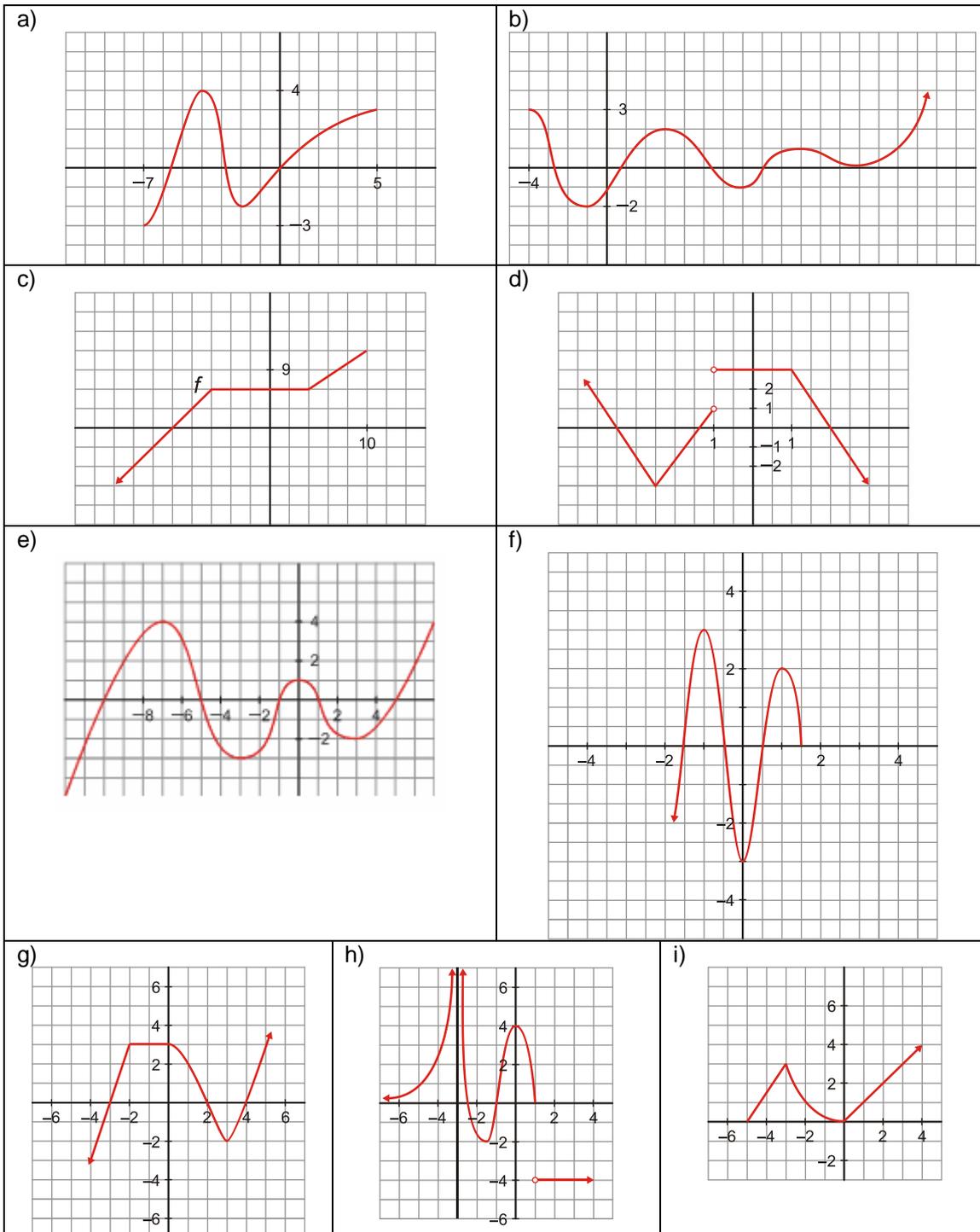
$$g) \frac{x+1}{x^2-4x+3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$$

**PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES**

**EJERCICIO 3 :** Dada las gráficas de las siguientes funciones, estudia sus propiedades:



Solución:

- a)  $Dom f = [-7, 5]$   
 $Rec f = [-3, 4]$   
 Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,5;0); (-2,8,0), (0,0) OY: (0,0)  
 Simetría: No es simétrica  
 Continuidad: Continua en  $[-7,5]$   
 Tendencia y periodicidad: No tiene  
 Monotonía: Creciente  $[-7,-4) \cup (-2,5]$  ; Decreciente  $(-4,-2)$   
 Extremos relativos: Máximo relativo  $(-4,4)$  y Mínimo relativo  $(-2,-2)$   
 Extremos absolutos: Máximo absoluto  $(-4,4)$  y Mínimo absoluto  $(-7,-3)$   
 Curvatura: Cóncava  $(-6,-3) \cup (0,5]$  y Convexa  $[-7,-6) \cup (-3,0)$   
 Puntos de Inflexión:  $(-6,-1), (-3,2), (0,0)$
- b)  $Dom f = [-4, \infty)$   
 $Rec f = [-2, \infty)$   
 Puntos de corte con los ejes: OX:  $(-2,7;0); (1,0), (5,5;0), (8,0), (13,0)$  y OY:  $(0;-1,2)$   
 Simetría: No es simétrica  
 Continuidad: Continua en  $[-4, \infty)$   
 Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a  $+\infty$   
 Monotonía: Creciente  $(-1,3) \cup (7,10) \cup (13,+\infty)$  ; Decreciente  $[-4,-1) \cup (3,7) \cup (10,13)$   
 Extremos relativos: Máximos relativos  $(3,2), (10,1)$  y Mínimo relativo  $(-1,-2), (7,-1), (13,0)$   
 Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto  $(-1,-2)$   
 Curvatura: Cóncava  $[-4,-3) \cup (0;5,2) \cup (8,12)$  y Convexa  $(-3,0) \cup (5,2;8) \cup (12,+\infty)$   
 Puntos de Inflexión:  $(-3;1,8), (5,2;0), (8,0), (12;0,8)$
- c)  $Dom f = (-\infty, 10]$   
 $Rec f = (-\infty, 12]$   
 Puntos de corte con los ejes: OX:  $(-10,0)$  OY:  $(0,6)$   
 Simetría: No es simétrica  
 Continuidad: Continua en  $(-\infty, 10]$   
 Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiene a  $-\infty$ , la función tiene a  $-\infty$   
 Monotonía: Creciente  $(-\infty,-6) \cup (4,10]$  ; Constante  $(-6,4)$   
 Extremos relativos: No tiene  
 Extremos absolutos: Máximo absoluto  $(10,12)$  y Mínimo absoluto no tiene  
 Curvatura: No tiene  
 Puntos de Inflexión: No tiene
- d)  $Dom f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty) = \mathbb{R} - \{-1\}$   
 $Rec f = \mathbb{R}$   
 Puntos de corte con los ejes: OX:  $(-3,5;0), (-1,3;0), (2,0)$  OY:  $(0,3)$   
 Simetría: No es simétrica  
 Continuidad: Continua en  $\mathbb{R} - \{-1\}$ . En  $x = -1$  es discontinua inevitable de salto finito (Salto 2)  
 Tendencia y periodicidad: Cuando la  $x$  tiende a  $-\infty$  la función tiende a  $+\infty$ . Cuando la  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a  $-\infty$ .  
 Monotonía: Creciente  $(-2,5;-1)$  ; Decreciente  $(-\infty;-2,5) \cup (1,+\infty)$  ; Constante  $(-1,1)$   
 Extremos relativos: Máximo relativo: No tiene y Mínimo relativo  $(-2,5;-3)$   
 Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene  
 Curvatura: No tiene  
 Puntos de Inflexión: No tiene
- e)  $Dom f = \mathbb{R}$                        $Rec f = \mathbb{R}$   
 Puntos de corte con los ejes: OX:  $(-10,0), (-5,0), (-1,0), (1,0), (5,0)$  y OY:  $(0,1)$   
 Simetría: No es simétrica  
 Continuidad: Continua en  $\mathbb{R}$   
 Tendencia y periodicidad: Cuando la  $x$  tiende a  $-\infty$ , la función tiende a  $-\infty$ . Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a  $+\infty$   
 Monotonía: Creciente  $(-\infty,-7) \cup (-3,0) \cup (3,+\infty)$  ; Decreciente  $(-7,-3) \cup (0,3)$   
 Extremos relativos: Máximos relativos  $(-7,4), (0,1)$  y Mínimos relativos  $(-3,-3), (3,-2)$   
 Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene  
 Curvatura: Cóncava  $(-\infty,-5) \cup (-1,1)$  y Convexa  $(-5,-1) \cup (1,+\infty)$   
 Puntos de Inflexión:  $(-5,0), (-1,0), (1,0)$

f)  $Dom f = (-\infty; 1,5]$

Rec  $f = (-\infty, 3]$

Puntos de corte con los ejes: OX: (-1,5;0), (-0,5;0), (0,5;0), (1,5;0) y OY: (0,-3)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en  $(-\infty; 1,5]$ Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , la función tiende a  $-\infty$ Monotonía: Creciente  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  ; Decreciente  $(-1, 0) \cup (1; 1,5]$ 

Extremos relativos: Máximos relativos (-1,3), (1,3) y Mínimo relativo (0,-3)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: (-1,3) y Mínimo absoluto: No tiene

Curvatura: Cóncava  $(-\infty, -0,5) \cup (0,5; 1,5]$  y Convexa  $(-0,5; 0,5)$ 

Puntos de Inflexión: (-0,5;0), (0,5;0)

g)  $Dom f = \mathbb{R}$

Rec  $f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: OX: (-3,0), (2,0), (4,0) y OY: (0,3)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en  $\mathbb{R}$ Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , la función tiende a  $-\infty$ . Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a  $+\infty$ Monotonía: Creciente  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$  ; Constante (-2,0) ; Decreciente (0,3)

Extremos relativos: Máximos relativos: No tiene y Mínimo relativo (3,-2)

Extremos absolutos: No tiene

Curvatura: Cóncava (0,3) y Convexa  $(3, +\infty)$ 

Puntos de Inflexión: (3,-2)

h)  $Dom f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Rec  $f = \{-4\} \cup [-2, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes: OX: (-2,5;0); (-1,0), (1;0) y OY: (0,4)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en  $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ . En  $x = -3$  es discontinua inevitable de salto finito. En  $x = 1$  es discontinua inevitable de salto finito (salto 4)Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , la función tiende a 0. Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a -4. Asíntotas: Asíntota vertical  $x = -3$  (Se va al infinito). Asíntota horizontal  $y = 0$ Monotonía: Creciente  $(-\infty, -3) \cup (-1, 5, 0)$  ; Constante  $(1, +\infty)$  ; Decreciente  $(-3; -1,5) \cup (0, 1]$ 

Extremos relativos: Máximos relativos (0,4) y Mínimo relativo (-1,5;-2)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto  $\{(x, -4) / x \in (1, +\infty)\}$ Curvatura: Cóncava (-1,1) y Convexa  $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ 

Puntos de Inflexión: (-1,0)

i)  $Dom f = [-5, \infty)$

Rec  $f = [0, \infty)$

Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,0), (0,0) OY: (0,0)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en  $[-5, \infty)$ Tendencia y periodicidad: Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , la función tiende a  $+\infty$ Monotonía: Creciente  $[-5, -3) \cup (0, +\infty)$  ; Decreciente (-3,0)

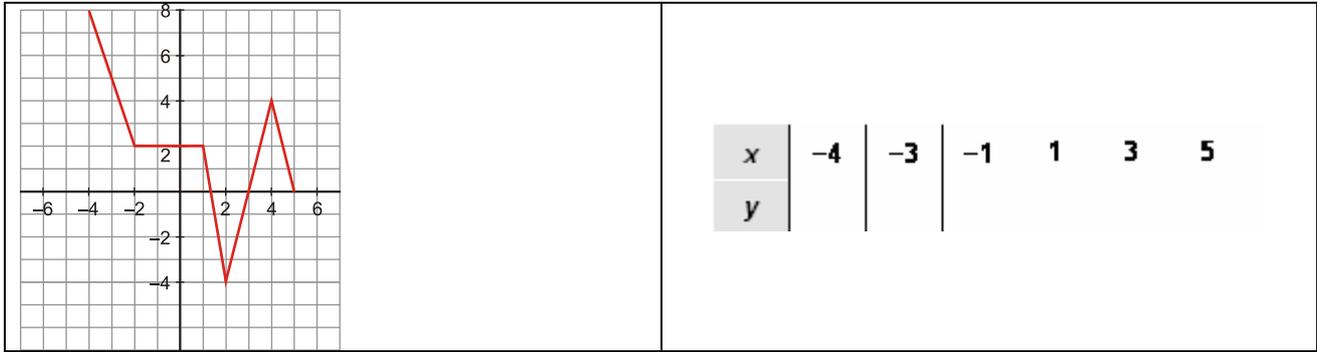
Extremos relativos: Máximos relativos (-3,3) y Mínimo relativo (0,0)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (-5,0), (0,0)

Curvatura: Convexa (-3,0)

Puntos de Inflexión: No tiene

**EJERCICIO 4 :** Observa la gráfica de la función y completa la siguiente tabla de valores:



Estudia sus propiedades.

*Solución:*

Completamos la tabla:

<b>x</b>	-4	-3	-1	1	3	5
<b>y</b>	8	5	2	2	0	0

Propiedades:

$Dom f = (-\infty, 5]$

$Rec f = [-4, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes: OX: (1,5;0), (3,0), (5,0) y OY: (0,2)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en  $(-\infty, 5]$

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a  $-\infty$ , la función tiende a  $+\infty$

Monotonía: Creciente (2,4) ; Constante (-2,1) ; Decreciente  $(-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup (4, 5]$

Extremos relativos: Máximos relativos (4,4) y Mínimo relativo (2,-1)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (2,-4)

Curvatura: No tiene

Puntos de Inflexión: No tiene

**EJERCICIO 5 :** Representa gráficamente una función,  $f$ , que cumpla las siguientes condiciones:

a)  $Dom (f) = [-5, 6]$

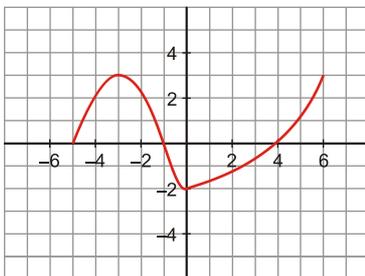
b) Crece en los intervalos  $(-5, -3)$  y  $(0, 6]$ ; decrece en el intervalo  $(-3, 0)$ .

c) Es continua en su dominio.

d) Corta al eje X en los puntos  $(-5, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(4, 0)$ .

e) Tiene un mínimo en  $(0, -2)$  y máximo en  $(-3, 3)$

*Solución:*



**EJERCICIO 6 :** Una función,  $f$ , cumple las siguientes condiciones:

a) El dominio de definición son todos los valores de  $x \leq 3$ .

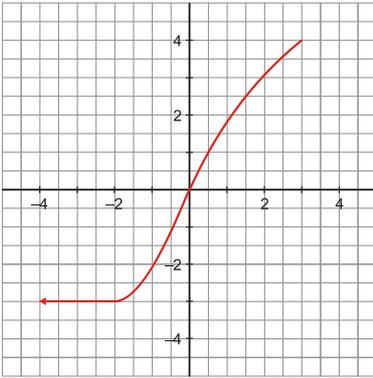
b) Es continua en su dominio.

c) Crece en el intervalo  $(-2, 3)$ .

d) Pasa por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(-2, -3)$  y  $(3, 4)$ .

e) Es constante para todos los valores de  $x \leq -2$ .

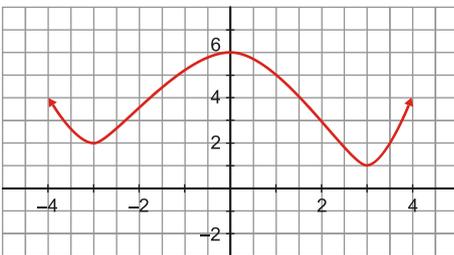
Solución:



**EJERCICIO 7 :** Representa gráficamente una función,  $f$ , que cumpla las siguientes condiciones:

- Está definida en todo  $\mathbb{R}$
- Es continua.
- Corta al eje  $Y$  en  $(0, 6)$ , pero no corta al eje  $X$ .
- Crece en  $(-3, 0)$  y  $(3, +\infty)$ . Decrece en  $(-\infty, -3)$  y  $(0, 3)$ .
- Su mínimo es  $(3, 1)$ , y pasa por el punto  $(-3, 2)$ .

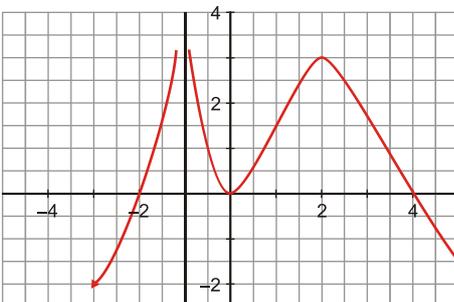
Solución:



**EJERCICIO 8 :** Haz la gráfica de una función que cumpla:

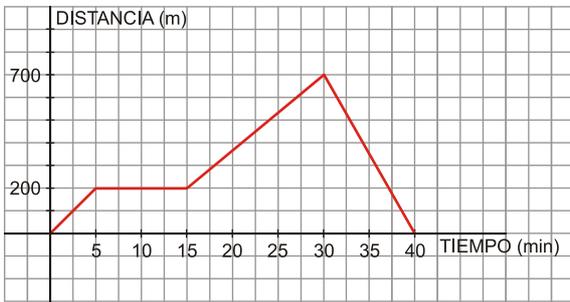
- Dominio de definición:  $\mathbb{R} - \{-1\}$
- Corta al eje  $X$  en  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 4$ .
- Crece en  $(-\infty, -1)$  y  $(0, 2)$ ; y decrece en  $(-1, 0)$  y  $(2, +\infty)$ .
- Tiene un máximo relativo en  $(2, 3)$ .

Solución:



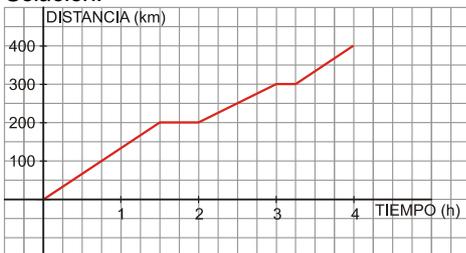
**EJERCICIO 9 :** Desde su casa hasta la parada del autobús, María tarda 5 minutos ( la parada está a 200 m de su casa); espera durante 10 minutos, y al ver que el autobús tarda más de lo normal, decide ir andando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar andando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que el teléfono móvil se le ha olvidado en casa y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar. Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

Solución:



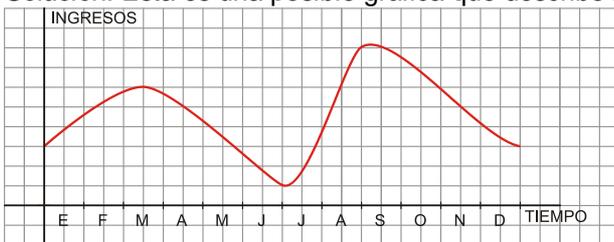
**EJERCICIO 10 :** Eduardo se va de vacaciones a una localidad situada a 400 km de su casa; para ello decide hacer el recorrido en coche. La primera parada, de 30 minutos, la hace al cabo de hora y media para desayunar, habiendo realizado la mitad del recorrido. Continúa su viaje sin problemas durante 1 hora, pero a 100 km del final sufre una parada de 15 minutos. En total tarda 4 horas en llegar a su destino. Representa la gráfica *tiempo-distancia recorrida*.

**Solución:**



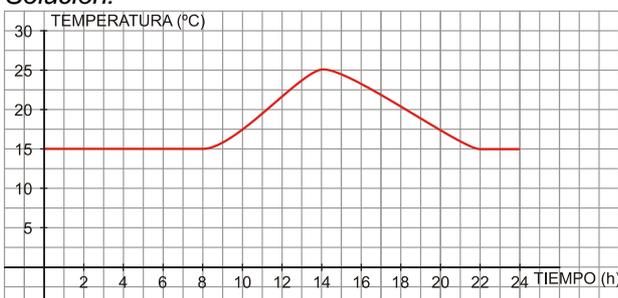
**EJERCICIO 11 :** Construye una gráfica que corresponda a los ingresos anuales que obtienen unos grandes almacenes, sabiendo que: Durante los dos primeros meses del año, aumentan paulatinamente debido a las ofertas; desde marzo hasta junio los ingresos van disminuyendo alcanzando, en ese momento, el mínimo anual. En julio y agosto vuelven a crecer los ingresos, alcanzando el máximo del año en agosto. A partir de entonces se produce un decrecimiento que llega a coincidir, en diciembre, con los ingresos realizados al comienzo del año.

**Solución:** Esta es una posible gráfica que describe la situación anterior:



**EJERCICIO 12 :** Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: A las 0 horas, la temperatura de una casa es de 15 ° C y, por la acción de un aparato que controla la temperatura, permanece así hasta las 8 de la mañana. En ese momento se enciende la calefacción y la temperatura de la casa va creciendo hasta que, a las 14:00 h, alcanza la temperatura máxima de 25 ° C. Paulatinamente, la temperatura disminuye hasta el momento en que se apaga la calefacción (a las 10 de la noche) volviendo a coincidir con la que había hasta las 8:00 horas.

**Solución:**



**EJERCICIO 13 :** Construye una gráfica que describa la siguiente situación: Rosa tardó, esta mañana, 20 minutos en llegar desde su casa al supermercado situado a 2 km de su casa; después de 40 minutos comprando, regresó en taxi a su casa tardando 10 minutos en llegar. Tras permanecer 50 minutos en su casa, cogió el coche para ir a una cafetería situada a 6 km, para lo cual tardó un cuarto de hora. Al cabo de hora y cuarto, volvió a coger el coche y regresó a su casa, tardando en esta ocasión media hora debido al tráfico.

**Solución:**

