P A R A   E M P E Z A R

1 **Un cuadrado tiene 15 centímetros de lado.**
Escribe la expresión algebraica que da el área cuando el lado aumenta x centímetros.

$A = (x + 15)^2$

2 **Señala cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios e indica su grado.**

a) $2a^2bc$ **b)** $\frac{3x}{y}$ **c)** $2xy^{-3}$ **d)** πx^5 **e)** $4x^2 + 3x$

Son monomios: a), de grado 4, y d), de grado 5.

3 **Realiza cuando sea posible las siguientes sumas y diferencias de monomios.**

a) $2x^5 + 4x^5$ **b)** $3xz^2 - 4x^2z$ **c)** $3xy + \frac{2}{3}xy$ **d)** $x + y + z$

a) $6x^5$ b) $3xz^2 - 4x^2z$ c) $\left(3 + \frac{2}{3}\right)xy = \frac{11}{3}xy$ d) $x + y + z$

4 **Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de monomios.**

a) $2xy \cdot \frac{3}{5}x^2y^4$ **b)** $2z^3t^4 \cdot 3x^2zt^3$ **c)** $20x^4 : 5x^3$ **d)** $\frac{5x^2yz^3}{xz^2}$

a) $\frac{6}{5}x^3y^5$ b) $6z^4t^7x^2$ c) $4x^{4-3} = 4x$ d) $5xyz$

5 **Resuelve la ecuación:** $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + 9}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{7 - 9}{4} = -\frac{1}{2}$$

Suma y producto de polinomios. identidades notables

E j e r c i c i o   r e s u e l t o

3.1 * **Deduce la fórmula para calcular el cubo de una suma y aplícala para calcular** $(2xy + 3zt)^3$.

Se descompone el cubo: $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) =$

Se desarrolla el cuadrado de la suma: $= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$

Se opera: $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Se aplica la fórmula al ejemplo: $(2xy + 3zt)^3 = 8x^3y^3 + 36x^2y^2zt + 54xyz^2t^2 + 27z^3t^3$

3.2 Dados los polinomios: $P(x) = x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 6x - 4$ y $R(x) = -2x^2 + x - 1$, realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) + Q(x)$
b) $P(x) - Q(x)$
c) $Q(x) - P(x)$
d) $P(x) + Q(x) + R(x)$
e) $P(x) - Q(x) + R(x)$
f) $P(x) - [Q(x) + R(x)]$

a) $P(x) + Q(x) = x^2 - 5x + 4 + 3x^2 + 6x - 4 = 4x^2 + x$

b) $P(x) - Q(x) = x^2 - 5x + 4 - 3x^2 - 6x + 4 = -2x^2 - 11x + 8$

c) $Q(x) - P(x) = 2x^2 + 11x - 8$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = 2x^2 + 2x - 1$

e) $P(x) + Q(x) + R(x) = -4x^2 - 10x + 7$

f) $P(x) - [Q(x) + R(x)] = -12x + 9$

3.3 Realiza las siguientes operaciones.

a) $3x^3 \cdot 5x^4$
b) $-2x^3 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot x$
c) $7x^3y^4 \cdot 10xy^6$
d) $6xy^4 \cdot \frac{3}{2}y^3 \cdot \frac{5}{12}x^4$

a) $3x^3 \cdot 5x^4 = 15x^7$

b) $-2x^3 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot x = -x^6$

c) $7x^3y^4 \cdot 10xy^6 = 70x^4y^{10}$

d) $6xy^4 \cdot \frac{3}{2}y^3 \cdot \frac{5}{12}y^3 = \frac{15}{4}x^5y^7$

3.4 Dados los polinomios: $P(x) = 3x^2 - x - 6$ y $Q(x) = -2x^2 + x - 1$, realiza las siguientes operaciones.

a) $2 \cdot P(x)$
b) $-3 \cdot Q(x)$
c) $2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$
d) $\frac{3}{4}P(x) - \frac{5}{6}Q(x)$

a) $2 \cdot P(x) = 6x^2 - 2x - 12$

b) $-3 \cdot Q(x) = 6x^2 - 3x + 3$

c) $2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x) = 12x^2 - 5x - 9$

d) $\frac{3}{4}P(x) - \frac{5}{6}Q(x) = \frac{47}{12}x^2 - \frac{19}{12}x - \frac{11}{3}$

3.5 Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 6x - 1$, $Q(x) = 2x^2 + 2x - 7$ y $R(x) = 2x - 5$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) \cdot Q(x)$
b) $Q(x) \cdot P(x)$
c) $P(x) \cdot R(x)$
d) $P(x) \cdot [R(x)]^2$

a) $P(x) \cdot Q(x) = 8x^4 - 4x^3 - 42x^2 + 40x + 7$

b) $Q(x) \cdot P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 42x^2 + 40x + 7$

c) $P(x) \cdot R(x) = 8x^3 - 32x^2 + 28x + 5$

d) $P(x) \cdot [R(x)]^2 = 16x^4 - 104x^3 + 216x^2 - 130x - 25$

3.6 Dados los polinomios: $P(x) = x^2 - x - 1$, $Q(x) = 2x^2 + 3x - 7$ y $R(x) = 2x^2 - 5$, realiza las siguientes operaciones.

a) $[P(x) + Q(x)] \cdot R(x)$
b) $2P(x) \cdot 5Q(x)$
c) $[2P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$
d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

a) $[P(x) + Q(x)] \cdot R(x) = 6x^4 + 4x^3 - 31x^2 - 10x + 40$

b) $2P(x) \cdot 5Q(x)] = 20x^4 + 10x^3 - 120x^2 + 40x + 70$

c) $[2P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = -10x^3 + 10x^2 + 25x - 25$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = -2x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 20x - 30$

3.7 Saca factor común en estas expresiones.

a) $3x^2 - 4x^3 + 7x^5$
b) $6x^4 - 12x^2 + 3x$
c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{7}{4}x^5$
d) $12x^5y^3 - 6xy^4 + 4x^2y^2$
e) $-30x^2y + 21x^4 + 18y$
f) $\frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{2}x$

a) $3x^2 - 4x^3 + 7x^5 = x^2(3 - 4x + 7x^3)$

b) $6x^4 - 12x^2 + 3x = 3x(2x^3 - 4x + 1)$

c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{7}{4}x^3 = \frac{1}{4}x^2 (3 - 5x^4 + 7x)$

d) $12x^5y^3 - 6xy^4 + 4x^2y^2 = 2xy^2(6x^4y - 3y^2 + 2x)$

e) $-30x^2y + 21x^4 + 18y = 3(-10x^2y + 7x^4 + 6y)$

f) $\frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{2}x = 3x\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}\right)$

3.8 Realiza las siguientes operaciones utilizando las identidades notables.

a) $(2x + 3)^2$ **c)** $(x + 4)(x - 4)$ **e)** $(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$

b) $(3x - 1)^2$ **d)** $(2x^5 - 6x^3)^2$ **f)** $(3x^2 + 5x)^2$

a) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

c) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

d) $(2x^5 - 6x^3)^2 = 4x^{10} - 24x^8 + 36x^6$

e) $(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x) = 4x^4 - 25x^2$

f) $(3x^2 + 5x)^2 = 9x^4 + 30x^3 + 25x^2$

3.9 Realiza las siguientes operaciones utilizando las identidades notables.

a) $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^6\right)^2$ **b)** $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2)$

a) $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^6\right)^2 = \frac{9}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}x^8 + \frac{1}{9}x^{12} = \frac{9}{4}x^4 - x^8 + \frac{1}{9}x^{12}$

b) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$

3.10 Expresa cada polinomio como producto de dos factores utilizando las identidades notables.

a) $x^2 + 6x + 9$ **d)** $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{25}$

b) $16x^4 - 1$ **e)** $81x^2 + 2x + \frac{1}{81}$

c) $25x^6 + 4 - 20x^3$ **f)** $-20x + x^2 + 100$

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $16x^4 - 1 = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1)$

c) $25x^6 + 4 - 20x^3 = (5x^3 - 2)^2$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{25} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}\right)$

e) $81x^2 + 2x + \frac{1}{81} = \left(9x + \frac{1}{9}\right)^2$

f) $-20x + x^2 + 100 = (x - 10)^2$

3.11 Utiliza las identidades notables para expresar de otra forma los siguientes polinomios.

a) $(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2$ **c)** $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3$

b) $(\sqrt{3}x^5 - \sqrt{7}x^4)(\sqrt{3}x^5 + \sqrt{7}x^4)$ **d)** $3x^4 - 16x^2$

a) $(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{2}x + 2 = 2x^2 - 4x + 2$

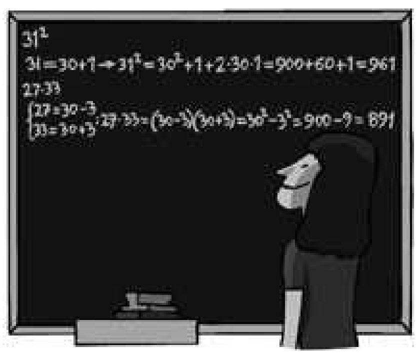
b) $(\sqrt{3}x^5 - \sqrt{7}x^4)(\sqrt{3}x^5 + \sqrt{7}x^4) = 3x^{10} - 7x^8$

c) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = (\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2$

d) $3x^4 - 16x^2 = (\sqrt{3}x^2 + 4x)(\sqrt{3}x^2 - 4x)$

PARA APLICAR

3.12 Gloria utiliza trucos basados en las identidades notables para hacer mentalmente algunas operaciones. Observa el método que ha empleado en los ejemplos de la figura y calcula mentalmente las siguientes potencias.



a) 35^2 **b)** 49^2 **c)** 21^2

a) $35^2 = (30 + 5)^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

b) $49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

c) $21^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

3.13 Se quieren fabricar botes de zumo cilíndricos cuya altura sea igual al diámetro de la base.

a) Halla el volumen de los botes en función del radio de la base.

b) Halla el área lateral de los botes en función del diámetro de la base.

a) Llamando x al radio, $V = \pi r^2 - 2x = 2\pi x^3$.

b) Llamando d al diámetro, $A_l = d \cdot \pi \cdot d = d^2 \cdot \pi$

3.14 Demuestra que para cualquier pareja de números pares consecutivos la diferencia de sus cuadrados es igual al cuádruple del número impar intermedio.

Sea n el número impar intermedio. Los números pares serán $n - 1$ y $n + 1$.

$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = 4n$, como queríamos demostrar.

División de polinomios. Regla de Ruffini

PARA PRACTICAR

3.15 Indica razonadamente cuáles de las siguientes divisiones puede realizarse y halla en dichos casos el polinomio cociente.

a) $\dfrac{3x^2 - 6x}{3x}$

b) $\dfrac{12x^4 - 16x^3 + 8x^2}{4x^2}$

c) $\dfrac{21x^5 + 12x^4 + 3x^3}{3x^3}$

d) $\dfrac{100x^8 - 20x^6}{-5x^4}$

Todas las divisiones son exactas.

a) $\dfrac{3x^2 - 6x}{3x} = \dfrac{3x(x - 2)}{3x} = x - 2$

b) $\dfrac{12x^4 - 16x^3 + 8x^2}{4x^2} = 3x^2 - 4x + 2$

c) $\dfrac{21x^5 + 12x^4 + 3x^3}{3x^3} = 7x^2 + 4x + 1$

d) $\dfrac{100x^8 - 20x^6}{-5x^4} = -20x^4 + 4x^2$

3.16 Efectúa las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{12x^2 - 6x + 8}{2x + 1}$

b) $\dfrac{20x^2 + 10x + 50}{10x - 3}$

c) $\dfrac{4x^2 + 7x - 3}{x^2 - 2x}$

d) $\dfrac{-6x^2 + 1}{-3x + 4}$

i) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 3}$

e) $\dfrac{3x^3 - 7x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 6}$

f) $\dfrac{4x^3 - 10x + 2}{x^2 - 4}$

g) $\dfrac{x^4 - 5x + 3}{-x^3 + 5x - 3}$

h) $\dfrac{x^4 - x^3 - x^2}{x^3 + x^2 - x}$

j) $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 2}{x^2 - x + 4}$

a) Cociente: $6x - 6$. Resto: 14

b) Cociente: $2x + \dfrac{8}{5}$. Resto: $\dfrac{274}{5}$

c) Cociente: 4. Resto: $15x - 3$

d) Cociente: $2x + \dfrac{8}{3}$. Resto: $\dfrac{29}{3}$

i) Cociente: $2x^2 + 9x + 53$. Resto: $287x - 158$

e) Cociente: $3x - 10$. Resto: $32x - 65$.

f) Cociente: $4x$. Resto: $6x + 2$.

g) Cociente: $-x$. Resto: $5x^2 - 8x + 3$

h) Cociente: $x - 2$. Resto: $2x^2 - 2x$

j) Cociente: $3x^2 - 2x - 14$. Resto: $-6x + 54$

3.17 Escribe el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de cada división.

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & & 6 & 14 & 36 \\ \hline & 3 & 7 & 18 & \boxed{41} \end{array}$$

Dividendo: $3x^3 + x^2 + 4x + 5$. Divisor: $x - 2$. Cociente: $3x^2 + 7x + 18$. Resto: 41

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 8 & 0 \\ -1 & & -6 & 9 & -17 \\ \hline & 6 & -9 & 17 & \boxed{-17} \end{array}$$

Dividendo: $6x^3 - 3x^2 + 8x$. Divisor: $x + 1$. Cociente: $6x^2 - 9x + 17$. Resto: -17

3.18 Divide utilizando la regla de Ruffini.

a) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x - 2}$

b) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x + 2}$

c) $\dfrac{4x^5 - 3x^3 + x - 10}{x - 1}$

d) $\dfrac{4x^5 - 3x^3 + x - 10}{x + 1}$

a) Cociente: $3x^2 + x + 6$. Resto: 11

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 2 & & 6 & 2 & 12 \\ \hline & 3 & 1 & 6 & \boxed{11} \end{array}$$

b) Cociente: $3x^2 - 11x + 26$. Resto: -53

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & 4 & -1 \\ -2 & & -6 & 22 & -52 \\ \hline & 3 & -11 & 26 & \boxed{-53} \end{array}$$

c) Cociente: $4x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 2$. Resto: -8

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -3 & 0 & 1 & -10 \\ 1 & & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & \boxed{-8} \end{array}$$

d) Cociente: $4x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 2$. Resto: -12

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -3 & 0 & 1 & -10 \\ -1 & & -4 & 4 & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 4 & -4 & 1 & -1 & 2 & \boxed{-12} \end{array}$$

3.19 Efectúa las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x + \dfrac{3}{5}}$ **b)** $\dfrac{x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{4}{9}x - \dfrac{31}{27}}{x - \dfrac{1}{3}}$

a) Cociente: $2x - \dfrac{31}{5}$.

Resto: $\dfrac{168}{25}$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 2 & -5 & 3 \\
\frac{-3}{5} & & \frac{-6}{5} & \frac{93}{25} \\
\hline
 & 2 & \frac{-31}{5} & \boxed{\frac{168}{25}}
\end{array}$$

b) Cociente: $x^2 + \dfrac{4}{9}$.

Resto: -1

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-31}{27} \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{27} \\
\hline
 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \boxed{-1}
\end{array}$$

Ejercicio resuelto

3.20 Halla el valor de k para que el resto de la división $\dfrac{3x^2 + kx - 5}{x - 2}$ sea 1.

Se hace la división mediante la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & k & -5 \\
2 & & 6 & 12 + 2k \\
\hline
 & 3 & 6 + k & \boxed{7 + 2k}
\end{array}$$

Como $7 + 2k = 1$, el valor de k debe ser -3.

3.21 Halla en cada caso el valor de k para que la división sea exacta.

a) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + kx - 6}{x - 1}$ **b)** $\dfrac{kx^3 - x^2 + 3x + 4}{x + 2}$

a)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & k & -6 \\
1 & & 3 & -2 & k - 2 \\
\hline
 & 3 & -2 & k - 2 & k - 8
\end{array}$$

Como $k - 8 = 0$, el valor de k debe ser 8.

b)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & k & -1 & 3 & 4 \\
-2 & & -2k & 2 + 4k & -10 - 8k \\
\hline
 & k & -1 - 2k & 5 + 4k & \boxed{-6 - 8k}
\end{array}$$

Como $-8k - 6 = 0$, el valor de k debe ser $\dfrac{-3}{4}$.

3.22 Comprueba sin efectuar la división que el cociente y el resto de la división $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 3}{x^2 - 2}$ son respectivamente: $C(x) = x - 5$ y $R(x) = 2x - 7$.

Se comprueba que $x^3 - 5x^2 + 3 = (x^2 - 2)(x - 5) + (2x - 7)$, aplicando la regla $D = d \cdot c + r$ de la división.

3.23 Un polinomio es divisible entre $(x - 2)$ y entre $(x + 2)$.

a) ¿Hay más de un polinomio que cumpla esas condiciones? En caso afirmativo pon dos ejemplos.

b) ¿Hay más de un polinomio de segundo grado que cumpla estas condiciones? En caso afirmativo pon dos ejemplos, uno de los cuales tenga por coeficiente del término de segundo grado el 4.

a) Hay más de uno. Por ejemplo, $(x - 2)(x + 2)$ y $4(x - 2)(x + 2)$.

b) Los dos polinomios anteriores son de segundo grado, y el coeficiente principal del segundo es 4.

3.24 Realiza las siguientes divisiones:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

Observando los cocientes obtenidos, ¿podrías indicar el cociente de $\frac{x^{10} - 1}{x - 1}$ sin hacer la división?

Los cocientes son $x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$, respectivamente. El cociente pedido es $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

3.25 Para dividir $(3x^2 - 5x + 2) : \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)$ sin tener que operar con fracciones, un alumno ha decidido multiplicar el dividendo y el divisor por 3, obteniendo $(9x^2 - 15x + 6) : (x - 2)$. La división es ahora mucho más sencilla, pero… ¿coincidirán el cociente y el resto con los de la primera división? Averígualo.

En general, $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$. Al multiplicar dividendo y divisor por 3, queda $\frac{3D}{3d} = c + \frac{3r}{3d}$. El resto queda multiplicado por 3. Se puede comprobar que en la primera división el resto es 4 y en la segunda es 12.

3.26 Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que cumple estas tres condiciones.

- **El coeficiente principal es 1.**
- **El polinomio es múltiplo de $x - 2$.**
- **Al dividir el polinomio entre $x - 1$ el resto de la división es -5.**

Por las dos primeras condiciones, el polinomio será de la forma $(x - 2)(x + k)$.
Aplicando el teorema del resto, $(1 - 2)(1 + k) = -5 \Rightarrow k = 4$, el polinomio buscado es $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$.
También se puede resolver dividiendo mediante la regla de Ruffini $(x - 2)(x + k)$ entre $(x - 1)$ e igualando el resto de la división a -5.

Teorema del resto. Raíces de un polinomio

PARA PRACTICAR

3.27 Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = 2x^3 - 5x + 7$ y $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6$, halla los valores numéricos indicados de dos formas, sustituyendo y usando el teorema del resto.

a) $P(1)$ b) $Q(1)$ c) $R(3)$

a) Sustituyendo: $P(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 4$. Haciendo la división:

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 6 \\ 1 & & 3 & -2 \\ \hline & 3 & -2 & P(1) = 4 \end{array}$$

b) Sustituyendo: $Q(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 + 7 = 4$. Haciendo la división:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -5 & 7 \\ 1 & & 2 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & -3 & Q(1) = 4 \end{array}$$

c) Sustituyendo: $R(3) = \frac{1}{3}3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = 0$. Haciendo la división:

$$\begin{array}{c|ccc} & \frac{1}{3} & -3 & 6 \\ 3 & & 1 & -6 \\ \hline & \frac{1}{3} & -2 & R(3) = 0 \end{array}$$

3.28 Dado el polinomio $P(x) = 5x(x - 3)(x + 1)$, calcula:

a) $P(3)$ b) $P(-2)$ c) $P(4)$

a) $P(3) = 5 \cdot 3(3 - 3)(3 + 1) = 0$

b) $P(-2) = 5 \cdot (-2)(-2 - 3)(-2 + 1) = -50$

c) $P(4) = 5 \cdot 4(4 - 3)(4 + 1) = 100$

3.29 Halla el resto sin hacer la división.

a) $(3x^2 - 5x + 9) : (x - 2)$

b) $(x^{12} - 3x + 5) : (x - 1)$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 2x - 50) : (x + 2)$

d) $(x^5 + 10x^4 - 3x - 1) : (x + 10)$

En todos los casos se aplica el teorema del resto.

a) $3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 = 11$

b) $1^{12} - 3 \cdot 1 + 5 = 3$

c) $3(-2)^3 - 5(-2)^2 + 2(-2) - 50 = -98$

d) $(-10)^5 + 10(-10)^4 - 3(-10) - 1 = 29$

3.30 Comprueba cuáles de los valores indicados son raíces del polinomio $P(x) = 10x^3 + 31x^2 - 9$.

$x = -1$ $x = \frac{1}{2}$ $x = -2$ $x = -\frac{3}{5}$ $x = -3$

$P(-1) = 10(-1)^3 + 31(-1)^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow$ -1 no es una raíz del polinomio.

$P(0{,}5) = 10 \cdot 0{,}5^3 + 31 \cdot 0{,}5^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ 0,5 es una raíz del polinomio.

$P(-2) = 10(-2)^3 + 31(-2)^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow$ -2 no es una raíz del polinomio.

$P(-0{,}6) = 10(-0{,}6)^3 + 31(-0{,}6)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ $-0{,}6$ es una raíz del polinomio.

$P(-3) = 10(-3)^3 + 31(-3)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ -3 es una raíz del polinomio.

Ejercicio resuelto

3.31 Sabiendo que -1 es una raíz del polinomio $P(x) = 3x^5 - 2kx^4 + 7kx + 8$, halla el valor de k.

Como -1 es raíz:

$P(-1) = 0$

$P(-1) = 3(-1)^5 - 2k(-1)^4 + 7k(-1) + 8 = 5 - 9k = 0$

El valor de k es $\frac{5}{9}$.

3.32 Halla el valor de k, sabiendo que 2 es una raíz del polinomio $P(x) = kx^3 - k^2x + 8$.

Debe cumplirse que $P(2) = 0$. $P(2) = k \cdot 2^3 - k^2 \cdot 2 + 8 = 8 - 2k^2 + 8 = 0$. Hay dos soluciones reales, $2 \pm 2\sqrt{2}$.

Ejercicio resuelto

3.33 Calcula las raíces del siguiente polinomio: $P(x) = 8x^3 - 14x^2 - 7x + 6$.

Si el polinomio tiene raíces enteras, estas serán divisores de 6, es decir: ±1, ±2, ±3 o ±6.
Comprobamos que $x = 2$ es raíz, porque la división por $(x - 2)$ es exacta.

	8	−14	−7	6
2		16	4	−6
	8	2	−3	0

Si continuamos dividiendo, comprobamos que ninguno de los otros divisores del término independiente es raíz, por tanto el polinomio no tiene más raíces enteras.

Buscamos las raíces fraccionarias resolviendo la ecuación: $8x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}, x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, las raíces de $P(x)$ son $-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ y 2.

3.34 Calcula las raíces de estos polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

b) $3x^3 + 9x^2 - 6x - 18$

c) $2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$

d) $6x^3 + 23x^2 - 38x - 15$

e) $12x^3 - 20x^2 + x + 3$

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 2)(x + 3)$. Las raíces son -2, 2 y -3.

b) $3x^3 + 9x^2 - 6x - 18 = 3(x + 3)(x^2 - 2)$. Las raíces son -3, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

c) $2x^3 - 3x^2 - 23x + 12 = (x + 3)(x - 4)(2x - 1)$. Las raíces son -3, 4 y $\frac{1}{2}$.

d) $6x^3 + 23x^2 - 38x - 15 = (x + 5)(2x - 3)(3x + 1)$. Las raíces son -5, $\frac{3}{2}$ y $\frac{-1}{3}$.

e) $12x^3 - 20x^2 + x + 3 = (2x - 1)(2x - 3)(3x + 1)$. Las raíces son $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{-1}{3}$.

3.35 Halla las raíces de estos polinomios.

a) $(x^2 - 1)(x + 3)(x - 7)$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - 5)$

c) $3x(x - 2)(x + 6)$

d) $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$

a) $(x^2 - 1)(x + 3)(x - 7) \Rightarrow$ Las raíces son 1, -1, -3 y 7.

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - 5) \Rightarrow$ Las raíces son $\frac{1}{2}$ (doble) y 5.

c) $3x(x - 2)(x + 6) \Rightarrow$ Las raíces son 0, 2 y -6.

d) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) \Rightarrow$ Las raíces son $\pm\sqrt{3}$. El segundo factor no tiene raíces reales.

PARA APLICAR

3.36 * **Calcula el valor de *a* para que el resto de la división $(2x^3 + ax^2 + 5x - 10) : (x + 4)$ sea 6.**

Por el teorema del resto, $2(-4)^3 + a(-4)^2 + 5(-4) - 10 = 6 \Rightarrow 16a = 164 \Rightarrow a = \frac{164}{16} = \frac{41}{4}$.

3.37 Calcula el valor de *a* para que el resto de la división $(x^2 + x - 10) : (x - a)$ sea 2.

Se aplica el teorema del resto. Hay que resolver la ecuación $\Rightarrow a^2 + a - 10 = 2 \Rightarrow a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \text{o} \\ a = -4 \end{cases}$

3.38 Halla los valores de *a* y *b* para que el polinomio $P(x) = x^3 + ax + b$ tenga raíces 2 y -1.

Sustituyendo, $\begin{cases} 2^3 + a \cdot 2 + b = 0 & \Rightarrow 2a + b = -8 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1) + b = 0 & \Rightarrow -a + b = 1 \end{cases}$. La solución del sistema es $a = -3$, $b = -2$.

3.39 Calcula el valor de *a* para que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + 10$ sea divisible entre $(x + 2)$.

Para que el resto de la división sea 0, debe cumplirse:

$(-2)^3 + a(-2)^2 + 10 = 0 \Rightarrow -8 + 4a + 10 = 0 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$

3.40 El polinomio $P(x)$ se puede escribir como $P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$.

a) ¿Es cierto que cualquier raíz de $Q(x)$ es también raíz de $P(x)$?

b) ¿Es cierto que cualquier raíz de $P(x)$ es también raíz de $Q(x)$?

c) Halla el valor numérico de $P(x)$ para $x = -5$, sabiendo que $Q(-5) = 10$.

a) Es cierto. Si para a se cumple que $Q(a) = 0$, entonces $P(a) = (a - 2) \cdot Q(a) = (a - 2) \cdot 0 = 0$.

b) No necesariamente. Como ejemplo, ya que el polinomio $P(x)$ se anula en $x = 2$, basta con elegir $Q(x) = x$. $Q(x)$ no se anula en $x = 2$.

c) $P(-5) = (-5 - 2) \cdot Q(-5) = -7 \cdot 10 = -70$

3.41 Sea el polinomio: $P(x) = x^5 + 9x^4 + 31x^3 + 51x^2 + 40x + 12$.

Para buscar sus raíces enteras habría que probar los divisores de 12. Justifica que el polinomio no puede tener raíces positivas, y halla sus raíces.

Como todos los coeficientes son mayores que 0, si se sustituyen valores positivos el resultado es siempre mayor que 0. Solo puede haber raíces negativas. Probando valores negativos, se encuentran las raíces del polinomio: -3, -2 (doble) y -1 (doble).

Teorema del factor. Factorización de polinomios

E j e r c i c i o   r e s u e l t o

3.42 Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x$ e indica cuáles son sus raíces.

1.º En este caso se puede extraer factor común:

$$P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x = 2x(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$$

2.º Se buscan las raíces enteras del polinomio resultante, $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, que deben ser divisores de 10. Se hallan dividiendo por Ruffini y utilizamos la relación dividendo = divisor · cociente.

	1	−6	3	10
−1		−1	7	−10
	1	−7	10	0
2		2	−10	
	1	−5	0	

$x = -1$ es una raíz $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x + 1)(x^2 - 7x - 10)$

$x = 2$ es una raíz $\Rightarrow x^2 - 7x - 10 = (x - 2)(x - 5)$

Por tanto $P(x) = 2x\,(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

El polinomio tiene 4 raíces: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$.

P A R A   P R A C T I C A R

3.43 Comprueba si $(x - 1)$ es un factor de los siguientes polinomios.

$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x - 1$ $\qquad$ $Q(x) = 6x^5 - 3x^2 - 2x - 1$ $\qquad$ $R(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

Si $(x - 1)$ es un factor, $x = 1$ es una raíz, y viceversa.

$P(1) = -1 \Rightarrow (x - 1)$ no es un factor de $P(x)$.

$Q(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es un factor de $Q(x)$.

$R(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es un factor de $R(x)$.

3.44 Comprueba si $(x + 2)$ es un factor de los siguientes polinomios.

$P(x) = x^3 + 14x - 12$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 8$ $\qquad$ $R(x) = 2x^4 - 3x^2 - 8$

Al igual que en el ejercicio anterior, se sustituye $x = -2$.

$P(-2) = -48 \Rightarrow (x + 2)$ no es un factor de $P(x)$.

$Q(-2) = -24 \Rightarrow (x + 2)$ no es un factor de $Q(x)$.

$R(-2) = 12 \Rightarrow (x + 2)$ no es un factor de $R(x)$.

3.45 Factoriza los siguientes polinomios, utilizando las identidades notables:

$P(x) = x^2 - 4 \qquad Q(x) = 3x^2 + 6x + 3$

El polinomio $P(x)$ es una diferencia de cuadrados, que se puede escribir como una suma por una diferencia:

$P(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

Si en el polinomio $Q(x)$ se extrae factor común al 3, se obtiene el cuadrado de una suma:

$Q(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

3.46 Factoriza los siguientes polinomios, extrayendo factor común y utilizando las identidades notables.

$\mathbf{P(x) = 5x^3 + 40x^2 + 80x} \qquad \mathbf{Q(x) = x^2 - \frac{16}{100}}$

$P(x) = 5x^3 + 40x^2 + 80x = 5x(x^2 + 8x + 16) = 5x(x + 4)^2$

$$Q(x) = x^2 - \frac{16}{100} = \left(x + \frac{4}{10}\right)\left(x - \frac{4}{10}\right) = \left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

3.47 Factoriza los siguientes polinomios de segundo grado.

$\mathbf{P(x) = x^2 - 7x + 10}$

$\mathbf{Q(x) = x^2 - 7x - 18}$

$\mathbf{R(x) = 3x^2 - 6x - 9}$

$\mathbf{S(x) = 3x^2 - 5x + 2}$

En los cuatro casos, se iguala el polinomio a 0 y se resuelve la ecuación de segundo grado.

Raíces de $P(x)$: 5 y 2. $P(x) = (x - 5)(x - 2)$

Raíces de $Q(x)$: 9 y -2. $Q(x) = (x - 9)(x + 2)$

Raíces de $R(x)$: -1 y 3. $R(x) = 3(x + 1)(x - 3)$

Raíces de $S(x)$: 1 y $\frac{2}{3}$. $S(x) = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

3.48 Factoriza los siguientes polinomios.

$\mathbf{P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

$\mathbf{Q(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

$\mathbf{R(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18}$

$\mathbf{S(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6}$

En todos los casos, se busca una raíz entera usando la regla de Ruffini, se hace la división y se descompone el cociente de segundo grado resolviendo la ecuación correspondiente.

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$

$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x - 1)(x + 3)(x + 4)$

$R(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x + 3)^2(x - 2)$

$S(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 2(x + 3)(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

3.49 Factoriza los siguientes polinomios.

$\mathbf{P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18}$

$\mathbf{Q(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18}$

$\mathbf{R(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}$

$\mathbf{S(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4}$

$P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = (x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$Q(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 3)$

$R(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 1)$

$S(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4 = (x + 4)(x - 1)^3$

3.50 Factoriza completamente los siguientes polinomios.

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4x + 4)$$
$$Q(x) = (x^2 + 10x + 25)(x^2 + 6x - 7)$$
$$R(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 4)$$
$$S(x) = (x^2 + 36)(x^2 + x + 1)$$

$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)(x - 2)(x + 2)^2 = (x - 2)(x + 2)^3$

$Q(x) = (x^2 + 10x + 25)(x^2 + 6x - 7) = (x + 5)^2(x - 1)(x + 7)$

$R(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) = (x + 1)(x + 2)(x + 1)(x - 4) = (x + 2)(x + 1)^2(x - 4)$

$S(x) = (x^2 + 36)(x^2 + x + 1)$ No puede factorizarse más.

PARA APLICAR

3.51 Escribe un polinomio de grado 3 que cumpla las siguientes condiciones.

- **Es divisible entre $(x - 3)$.**
- **Una de sus raíces es $x = -2$.**
- **El término independiente es 24.**

Por las dos primeras condiciones, el polinomio debe ser múltiplo de $(x - 3)$ y $(x + 2)$. Puede ser, por ejemplo, de la forma $(x - 3)(x + 2)(x + a)$. Para que el término independiente sea 24, debe ocurrir que $-3 \cdot 2 \cdot a = 24 \Rightarrow a = -4$.

Un polinomio que cumple esas condiciones es $(x - 3)(x + 2)(x - 4) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.

3.52 Dos números a y b cumplen la siguiente relación: $a^2 - b^2 = 2(a + b)$

a) Si a es par, ¿b es par o impar?

b) ¿Qué relación hay entre ambos números? Pon un ejemplo.

a) Si a es par, a^2 también, y $2(a + b)$ es siempre par. Por tanto, b^2es par, y b es par.

b) Como $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, solo hay dos posibilidades.
- Si $a + b = 0$, $a = -b$, ambos términos valen 0.
- Si $a + b \neq 0$, se puede dividir toda la ecuación y queda $a - b = 2 \Rightarrow a = b + 2$. Ambos números se diferencian en 2 unidades.

3.53 Resuelve la ecuación $x^4 - 19x^2 + 30x = 0$ factorizando el polinomio.

Se puede sacar factor común: $x^4 - 19x^2 + 30x = x(x^3 - 19x + 30)$

Se busca una raíz. Una fácil de hallar es 2: $x^4 - 19x^2 + 30x = x(x^3 - 19x + 30) = x(x - 2)(x^2 + 2x - 15)$

Se resuelve la ecuación de segundo grado: $x^4 - 19x^2 + 30x = x(x^3 - 19x + 30) = x(x - 2)(x^2 + 2x - 15) = x(x - 2)(x + 5)(x - 3)$

Las soluciones son 0, 2, -5 y 3.

3.54 Sabiendo que $P(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 4) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$, obtén la expresión del polinomio $Q(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Compruébalo.

El polinomio será $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Como los términos independientes de cada factor cambian de signo, se verán afectados los términos del polinomio obtenidos al multiplicar un número impar de estos.

3.55 Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ **$Q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$**

Se factorizan ambos polinomios.

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$ $Q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

m.c.d. $(P(x), Q(x)) = x - 1$

m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 3)(x + 4)$

3.56 **Si una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones r_1 y r_2, demuestra que se cumplen las siguientes igualdades:**

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Pista: $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Desarrollando el producto, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + a(-r_1 - r_2)x + ar_1r_2$.

$$\text{Igualando coeficientes, } \begin{cases} b = (-r_1 - r_2)a \Rightarrow \dfrac{b}{a} = -r_1 - r_2 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} = r_1 + r_2 \\ c = r_1r_2a \Rightarrow \dfrac{c}{a} = r_1r_2. \end{cases}$$

3.57 **En las siguientes ecuaciones hay siempre una solución fácil de obtener por tanteo. Utiliza las igualdades demostradas en la actividad anterior para hallar la otra.**

a) $x^2 + 15x - 16 = 0$

b) $-2x^2 + 10x - 8 = 0$

c) $4x^2 - 7x + 3 = 0$

d) $16x^2 + x - 17 = 0$

a) $x^2 + 15x - 16 = 0$. Se comprueba fácilmente que $x = 1$ cumple la ecuación. La otra solución es -16.

b) $-2x^2 + 10x - 8 = 0$. Como $x = 1$ es una solución, la otra será $\frac{-8}{-2} = 4$.

c) $4x^2 - 7x + 3 = 0$. Como $x = 1$ es una solución, la otra será $\frac{3}{4}$.

d) $16x^2 + x - 17 = 0$. Como $x = 1$ es una solución, la otra será $\frac{-17}{16}$.

Fracciones algebraicas

PARA PRACTICAR

3.58 **Comprueba si los siguientes pares de fracciones algebraicas son equivalentes.**

a) $\frac{x + 1}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\frac{a^2 - 5a + 4}{a}$ y $\frac{a^3 - 2a^2 - 11a + 12}{a^2 + 3a}$

a) $\frac{x + 1}{x - 2}$ y $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}$

b) $\frac{a^2 - 5a + 4}{a}$ y $\frac{a^3 - 2a^2 - 11a + 12}{a^2 + 3a} = \frac{(a^2 - 5a + 4)(a + 3)}{(a + 3)a} = \frac{a^2 - 5a + 4}{a}$

Ejercicio resuelto

3.59 **Simplifica la fracción algebraica $\frac{2x - 5x^2}{5x - 2}$:**

Se factorizan el numerador y el denominador.

$$\frac{2x - 5x^2}{5x - 2} = \frac{x(2 - 5x)}{5x - 2} = \frac{x(5x - 2) \cdot (-1)}{5x - 2} = -x$$

A la hora de simplificar, conviene tener los factores ordenados, y tener cuidado con el signo del coeficiente principal.

3.60 **Simplifica las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$

b) $\dfrac{3x^2 - 3x}{3x^3 - 6x^2 + 3x}$

c) $\dfrac{x(x - 2)^2}{x^2(x - 2)}$

d) $\dfrac{(x + 4)^2(x - 4)^2}{(x^2 - 16)}$

a) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 3)^2} = \dfrac{x - 3}{x + 3}$

b) $\dfrac{3x^2 - 3x}{3x^3 - 6x^2 + 3x} = \dfrac{3x(x - 1)}{3x(x - 1)^2} = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $\dfrac{x(x - 2)^2}{x^2(x - 2)} = \dfrac{x - 2}{x}$

d) $\dfrac{(x + 4)^2(x - 4)^2}{(x^2 - 16)} = \dfrac{(x + 4)^2(x - 4)^2}{(x + 4)(x - 4)} = (x + 4)(x - 4)$

3.61 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\dfrac{2x}{3x^2 - 5x} \cdot \dfrac{6x + 10}{4x^2}$

c) $\dfrac{x(x + 3)^2}{(x + 1)^3} : \dfrac{(x + 3)x^2}{(x^2 - 1)(x + 1)}$

d) $\dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 - 4} : \dfrac{2 - 3x}{(x + 2)(x - 2)}$

a) $\dfrac{x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)^2} = \dfrac{x + 3}{(x - 3)(x - 1)}$

b) $\dfrac{2x}{3x^2 - 5x} \cdot \dfrac{6x + 10}{4x^2} = \dfrac{2x \cdot 2 \cdot (3x + 5)}{x(3x - 5) \cdot 4x^2} = \dfrac{3x + 5}{x^2(3x - 5)}$

c) $\dfrac{x(x + 3)^2}{(x + 1)^3} : \dfrac{(x + 3)x^2}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \dfrac{x(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^3(x + 3)x^2} = \dfrac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)x}$

d) $\dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 - 4} : \dfrac{2 - 3x}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x(3x - 2)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)(2 - 3x)} = \dfrac{x(3x - 2)}{-(3x - 2)} = -x$

3.62 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{x - 3} - \dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{11}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{1 - x}$

c) $\dfrac{3(x - 2)}{x^2 - 16} + \dfrac{2x}{x^2 - 8x + 16}$

d) $\dfrac{2x}{(x - 1)(x - 2)} - \dfrac{2}{x - 2}$

a) $\dfrac{2}{x - 3} - \dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{11}{x^2 - 9} = \dfrac{2(x + 3) - 2(x - 3) - 11}{(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{1}{(x + 3)(x - 3)}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{1 - x} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} + \dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{x^2 + x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{x(2x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$

c) $\dfrac{3(x - 2)}{x^2 - 16} + \dfrac{2x}{x^2 - 8x + 16} = \dfrac{3(x - 2)}{(x + 4)(x - 4)} + \dfrac{2x}{(x - 4)^2} = \dfrac{3(x - 2)(x - 4) + 2x(x + 4)}{(x + 4)(x - 4)^2} = \dfrac{5x^2 - 10x + 24}{(x + 4)(x - 4)^2}$

d) $\dfrac{2x}{(x - 1)(x - 2)} - \dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{2x - 2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{2x - 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{2}{(x - 1)(x - 2)}$

3.63 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{x-2}{2-x} - x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{x-2}{x+2}$

b) $\dfrac{2}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x+2} + \dfrac{5x}{x^2-9} : \dfrac{1}{x+3}$

c) $\dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} \cdot \left(\dfrac{5x+9}{x} - \dfrac{4}{x} \cdot (x+3)\right)$

a) $\dfrac{x-2}{2-x} - x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-2}{-(x-2)} - \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{-(x-2)(x+2) - x^2 - (x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x(4-3x)}{(x+2)(x-2)}$

b) $\dfrac{2}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x+2} + \dfrac{5x}{x^2-9} : \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} + \dfrac{5x(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2(x+1)}{x+2} + \dfrac{5x}{x-3} =$

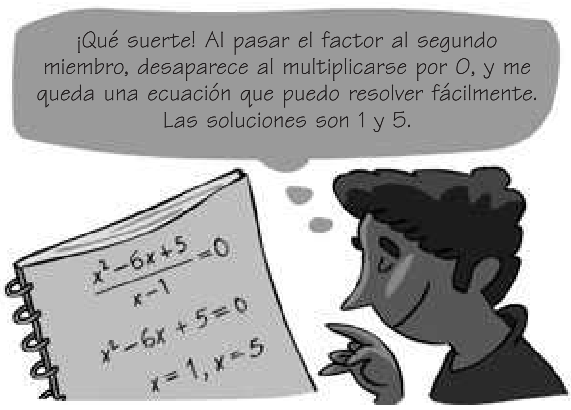
$= \dfrac{2(x+1)(x-3) + 5x(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{7x^2+6x-6}{(x+2)(x-3)}$

c) $\dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} \cdot \left(\dfrac{5x+9}{x} - \dfrac{4}{x} \cdot (x+3)\right) = \dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} \cdot \left(\dfrac{5x+9-4(x+3)}{x}\right) = \dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} \cdot \dfrac{x-3}{x} =$

$= \dfrac{2x^2+3x-2x+6}{x(x-1)} = \dfrac{2x^2+x+6}{x(x-1)}$

PARA APLICAR

3.64 Álvaro tiene que resolver una ecuación en la que aparece una fracción algebraica.



¿Es correcta la solución de Álvaro? Compruébalo sustituyendo ambos valores en la ecuación inicial.

No es correcta, ya que no se puede sustituir $x = 1$ en la ecuación inicial, porque se anula el denominador. La solución $x = 5$ sí es válida.

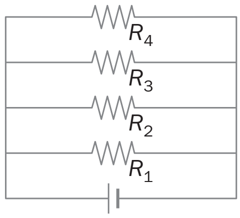
3.65 Calcula los valores de *a* y *b* para que se cumpla:

$$\frac{3x-1}{x+2} - \frac{3x+b}{x-2} + \frac{a}{x^2-4} = 0$$

$0 = \dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{3x+b}{x-2} + \dfrac{a}{x^2-4} = \dfrac{(3x-1)(x-2) - (3x+b)(x+2) + a}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow (-13-b)x + (a-2b+2) = 0$

Para que sea siempre 0, debe ocurrir que $\begin{cases} -13 - b = 0 \Rightarrow b = -13 \\ a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow a = 2b - 2 \Rightarrow a = -28 \end{cases}$

3.66 En un circuito eléctrico se han colocado cuatro resistencias en paralelo.



Se sabe que la resistencia equivalente es igual a la inversa de la suma de las inversas de las resistencias:

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}}$$

Halla la expresión de la resistencia R en función de R_1 sabiendo que $R_1 = R_2$, $R_3 = 2R_1$ y $R_4 = 2R_3$.

Se expresan todas las resistencias en función de la primera.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{4R_1}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}R_1$$

3.67 ¿Podrías hallar el resultado de la siguiente operación sin necesidad de efectuar muchos cálculos?

$$\boldsymbol{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{x-100}\right) =}$$

Se observa lo siguiente:

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \qquad 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \qquad 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

El numerador de cada fracción es igual al denominador de la siguiente. Al multiplicar todas, se simplifican términos, y queda solo $\frac{x-101}{x}$.

MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

3.68 Estima mediante la regla del cuadrado la distancia de seguridad que debería guardar el vehículo del ejemplo en un día de lluvia y utiliza el dato para calcular el valor de la aceleración de frenado en ese caso.

Como la velocidad es 72 km/h, la distancia de seguridad en seco es de 49 metros y de 98 metros en mojado.

Despejamos la aceleración de la siguiente fórmula:

$$98 = 20 \cdot 1 - \frac{20^2}{2a} \rightarrow 98 = 20 - \frac{200}{a} \rightarrow 78a = -200 \rightarrow a = \frac{-200}{78} = -2{,}56$$

Luego la aceleración es de $-2{,}56$ m/s^2.

3.69 Calcula la distancia de seguridad en las siguientes condiciones.

a) El vehículo circula a una velocidad de 90 kilómetros por hora, y debido al cansancio, el tiempo de reacción es de 3 segundos.

b) El vehículo circula a 120 km/h, y debido al mal estado de los frenos, la aceleración de frenado es de -7 m/s^2.

a) Pasamos la velocidad a m/s. $v = 90 \text{ km/h} = \frac{90 \cdot 1000}{3600} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$

Calculamos la distancia de seguridad: $d_{\text{seguridad}} = 25 \cdot 3 - \frac{25^2}{2 \cdot (-9)} \cong 110 \text{ m}$

b) Pasamos la velocidad a m/s. $v = 120 \text{ km/h} = \frac{120 \cdot 1000}{3600} \text{ m/s} = 33{,}33 \text{ m/s}$

Calculamos la distancia de seguridad: $d_{\text{seguridad}} = 33{,}33 \cdot 1 - \frac{(33{,}33)^2}{2 \cdot (-7)} \cong 113 \text{ m}$

PARA PRACTICAR Y APLICAR

3.70 Dados los polinomios: $P(x) = 3x^2 + 5x + 7$ y $Q(x) = 2x^2 - 5x + 7$, realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $5 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$

d) $P(x) \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 3x^2 + 5x + 7 + 2x^2 - 5x + 7 = 5x^2 + 14$

b) $P(x) - Q(x) = 3x^2 + 5x + 7 - (2x^2 - 5x + 7) = x^2 + 10x$

c) $5 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x) = 5(3x^2 + 5x + 7) - 4(2x^2 - 5x + 7) = 7x^2 + 45x + 7$

d) $P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 + 5x + 7) \cdot (2x^2 - 5x + 7) = 6x^4 - 15x^3 + 21x^2 + 10x^3 - 25x^2 + 35x + 14x^2 - 35x + 49 =$
$= 6x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 49$

3.71 Saca factor común en las siguientes expresiones.

a) $16x^5 - 8x^4 + 36x^3$

b) $-4xy^5 + 12x^2y^3 - 20x^2y^6$

c) $v_0t + \frac{1}{2}at^2$

d) $\frac{\pi}{4}R^2 - \frac{\pi}{4}r^2$

a) $16x^5 - 8x^4 + 36x^3 = 4x^3(4x^2 - 2x + 9)$

b) $-4xy^5 + 12x^2y^3 - 20x^2y^6 = 4xy^3(-y^2 + 3x - 5xy^3)$

c) $v_0t + \frac{1}{2}at^2 = t\left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)$

d) $\frac{\pi}{4}R^2 - \frac{\pi}{4}r^2 = \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)$

3.72 Utiliza las identidades notables para desarrollar estas expresiones.

a) $(3x^2 - 5x^6)^2$

b) $(2x^5 + 4y^2)^2$

c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$

d) $\left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$

a) $(3x^2 - 5x^6)^2 = 9x^4 - 30x^8 + 25x^{12}$

b) $(2x^5 + 4y^2)^2 = 4x^{10} + 16x^5y^2 + 16y^4$

c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2x^2 - (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 3$

d) $\left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2 = 9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$

3.73 * Una *terna pitagórica* es un conjunto de tres números enteros positivos que verifican el teorema de Pitágoras, como 3, 4 y 5. Para generar *ternas pitagóricas* se utiliza la siguiente fórmula, donde m y n son números naturales tales que $m > n$.

$a = m^2 + n^2$
$b = m^2 - n^2$
$c = 2mn$

Comprueba utilizando las identidades notables que cualquier terna de esta forma verifica $a^2 = b^2 + c^2$.

Hay que comprobar que al sustituir esas expresiones en el teorema se obtiene una identidad.

$a = m^2 + n^2 \Rightarrow a^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$
$b = m^2 - n^2 \Rightarrow b^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$
$c = 2mn \Rightarrow c^2 = 4m^2n^2$
$b^2 + c^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = a^2$

3.74 Dados los polinomios $P(x) = x^2 - 3x - 4$, $Q(x) = x^2 + 7x + 6$, encuentra un divisor común.

Se escribe la factorización de ambos polinomios.

$P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, $Q(x) = x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$

Un divisor común es $x + 1$.

3.75 Efectúa la siguiente división: $(6x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x - 1):(x^2 - x + 3)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
6x^4 & +5x^3 & -7x^2 & +3x & -1 & x^2 & -x & +3 \\
\cline{6-8}
-6x^4 & +6x^3 & -18x^2 & & & 6x^2 & +11x & -14 \\
\cline{1-3}
0 & +11x^3 & -25x^2 & +3x & & & & \\
 & -11x^3 & +11x^2 & -33x & & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -14x^2 & -30x & -1 & & & \\
 & & +14x^2 & -14x & +42 & & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -44x & +41 & & &
\end{array}
$$

3.76 Escribe el dividendo, divisor, cociente y resto de esta división.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & 0 & 4 & -5 & 2 & 0 \\
-1 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 3 & 0 & 4 & -5 & 2 & 0 \\
-1 & & -3 & 3 & -7 & 12 & -14 \\
\hline
 & 3 & -3 & 7 & -12 & 14 & -14
\end{array}
$$

Dividendo: $3x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 2x$. Divisor: $x + 1$. Cociente: $3x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 12x + 14$. Resto: -14.

3.77 Efectúa la siguiente división sin usar la regla de Ruffini y usándola, y comprueba que se obtiene el mismo resultado.

$(3x^6 - 5x^4 + 3x^3 - x + 7) : (x - 1)$

De ambas formas, el cociente es $3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x$, y el resto es 7.

3.78 Realiza las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini.

a) $(3x - 5x^2 + 7x^3 - 9) : (x - 2)$ **b) $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x + 2)$**

a) Cociente: $7x^2 + 9x + 21$. Resto: 33.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 7 & -5 & 3 & -9 \\
2 & & 14 & 18 & 42 \\
\hline
 & 7 & 9 & 21 & 33
\end{array}
$$

b) Cociente: $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Resto: 0.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\
-2 & & -2 & 4 & 2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0
\end{array}
$$

3.79 Calcula el resto de las siguientes divisiones.

a) $(3x^{10} - 4x^5 + 7) : (x - 1)$ **b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2) : (x + 1)$**

a) Por el teorema del resto, se sustituye $x = 1$ en el dividendo: $3 \cdot 1^{10} - 4 \cdot 1^5 + 7 = 3 - 4 + 7 = 6$.

b) El resto es $(-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 0$.

3.80 Calcula los valores numéricos del polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 5$, en cada uno de los valores de x que se indican $x = 1$ $x = 2$ $x = 3$ $x = 4$ $x = 5$ $x = 6$

¿Cuáles de estos valores son raíces del polinomio? ¿Puede haber más? ¿Por qué?

$P(1) = 0$; $P(2) = -3$; $P(3) = -4$; $P(4) = -3$; $P(5) = 0$; $P(6) = 5$

Son raíces del polinomio: 1 y 5. No puede haber más, ya que el grado del polinomio es 2.

3.81 Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = kx^2 - 5x + 3$ sea divisible entre $x + 2$.

Aplicando el teorema del resto, $0 = P(-2) = k(-2)^2 - 5(-2) + 3 = 4k + 13 \Rightarrow k = \dfrac{-13}{4}$.

3.82 Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^2 - 4kx + 3k^2$ sea divisible entre $x - 3$.

Aplicando el teorema del resto, $0 = P(3) = 3^2 - 4k \cdot 3 + 3k^2 = 3k^2 - 12k + 9 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1$ o $k = 3$

3.83 Calcula las raíces de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

b) $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

c) $R(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$. Raíces: 1, −1 (doble)

b) $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$. Raíces: −1, −2, 2.

c) $R(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$. Raíces: −1, −2, −3

3.84 Factoriza los siguientes polinomios e indica sus raíces.

a) $P(x) = x^3 - 13x - 12$

b) $Q(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

c) $R(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$

a) $P(x) = x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$. Raíces: −1, −3, 4

b) $Q(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$. Raíces: −2, −3, 4

c) $R(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = (x + 2)(x - 4)(x - 5)$. Raíces: −2, 4, 5

3.85 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x(x - 3)}{x^2 - 6x + 9}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$

a) $\dfrac{x(x - 3)}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{x(x - 3)}{(x - 3)^2} = \dfrac{x}{x - 3}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6} = \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

3.86 Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{10x + 3x^2}{x - 2}$

b) $\dfrac{x(x^2 - 1)}{(x^3 - 4)} \cdot \dfrac{x - 2}{x^2 - x}$

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{10x + 3x^2}{x - 2} = \dfrac{(3x^2 - 5x)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} - \dfrac{(10x + 3x^2)(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 10x - 3x^3 - 13x^2 - 10x}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{-24x^2}{(x + 1)(x - 2)}$

b) $\dfrac{x(x^2 - 1)}{(x^2 - 4)} \cdot \dfrac{x - 2}{x^2 - x} = \dfrac{x(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)x(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

3.87 El polinomio $P(x) = x^2 + x + 17$ tiene una propiedad curiosa. Sus valores numéricos para $x = 0, 1, 2, 3$ y 4, son todos números primos.

a) Comprueba la afirmación anterior.

b) Comprueba que también se obtienen números primos al sustituir $x = -1, -2, -3$ y -4.

c) ¿Será cierto que $P(x)$ genera números primos para cualquier valor entero de x?

a) Valores: $P(0) = 17$; $P(1) = 19$; $P(2) = 23$; $P(3) = 29$; $P(4) = 37$. Todos son primos.

b) Valores: $P(-1) = 17$; $P(-2) = 19$; $P(-3) = 23$; $P(-4) = 29$. Todos son primos.

c) No es cierto. Por ejemplo, para $x = 17$, todos los sumandos son múltiplos de 17, luego $P(17)$ también. $P(17) = 323 = 17 \cdot 19$.

3.88 Dados los polinomios:

$$P(x) = 3x^2 + x - 1 \qquad Q(x) = -2x^2 - 5x + 6$$

realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) + Q(x)$ **c)** $2x \cdot P(x)$

b) $P(x) - Q(x)$ **d)** $5 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 3x^2 + x - 1 + (-2)x^2 - 5x + 6 = x^2 - 4x + 5$

b) $P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 1 - (-2x^2 - 5x + 6) = 5x^2 + 6x - 7$

c) $2x \cdot P(x) = 2x \cdot (3x^2 + x - 1) = 6x^3 + 2x^2 - 2x$

d) $5 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x) = 5(3x^2 + x - 1) - 3(-2x^2 - 5x + 6) = 21x^2 + 20x - 23$

3.89 Saca factor común en estas expresiones.

a) $28a^3 - 42a^2 + 36a$

b) $3xy^5 - 12xy^4 + 3xy$

a) $28a^3 - 42a^2 + 36a = 2a(14a^2 - 21a + 18)$

b) $3xy^5 - 12xy^4 + 3xy = 3xy(y^4 - 4y^3 + 1)$

3.90 Desarrolla estas identidades notables.

a) $(6x^3 + 7x^2)^2$

b) $(2a^2 - 5b^5)^2$

c) $(2xz^2 + t) \cdot (2xz^2 - t)$

a) $(6x^3 + 7x^2)^2 = 36x^6 + 84x^5 + 49x^4$

b) $(2a^2 - 5b^5)^2 = 4a^4 - 20a^2b^5 + 25b^{10}$

c) $(2xz^2 + t) \cdot (2xz^2 - t) = 4x^2z^4 - t^2$

3.91 Realiza la siguiente división.

$(3x^4 - 5x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 8)$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & & -5x^2 & +7x & -6 & x^2 & -2x & +8 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & +6x^3 & -24x^2 & & & 3x^2 & +6x & -17 \\ \cline{1-3}
0 & +6x^3 & -29x^2 & +7x & & & & \\
 & -6x^3 & +12x^2 & -48x & & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -17x^2 & -41x & -6 & & & \\
 & & +17x^2 & -34x & +136 & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -75x & +130 & & &
\end{array}$$

3.92 Efectúa la siguiente división por Ruffini.

$(2x^6 - 5x^4 + 3x^2 + x - 21) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 & 1 & -21 \\
-1 & & -2 & +2 & +3 & -3 & 0 & -1 \\ \hline
 & 2 & -2 & -3 & +3 & 0 & 1 & \boxed{-22}
\end{array}$$

El cociente es $2x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$, y el resto es -22.

3.93 Calcula el resto sin hacer la división. **$(3x^3 - 2x^2 + 4) : (x - 2)$**

Por el teorema del resto, será igual a $P(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 = 20$.

3.94 Factoriza estos polinomios e indica sus raíces.

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4)$

b) $(x - 7)(x^2 - 11x + 24)$

c) $3x^3 - 9x^2 + 6x$

d) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

e) $x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2$

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)^2$. Raíces: -1, 1, 2 (doble).

b) $(x - 7)(x^2 - 11x + 24) = (x - 7)(x - 3)(x - 8)$. Raíces: 7, 3, 8.

c) $3x^3 - 9x^2 + 6x = 3x(x^2 - 3x + 2) = 3x(x - 1)(x - 2)$. Raíces: 0, 1, 2.

d) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$. Raíces: 2, 3, 5.

e) $x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2 = x^2(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$. Raíces: 0 (doble), 1, -2, 3, -4.

3.95 Simplifica estas fracciones.

a) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 10x + 25}$

b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^2 - 2x - 3}$

a) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 10x + 25} = \dfrac{x(x - 5)}{(x - 5)^2} = \dfrac{x}{x - 5}$

b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x(x - 3)(x - 4)}{(x + 1)(x - 3)} = \dfrac{x(x - 4)}{x + 1}$

3.96 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{5x^3}{x - 2} \cdot \dfrac{2x}{x + 2}$

b) $\dfrac{3x - 6}{x^2 - 4} - \dfrac{5x - 7}{x^2 + 2x}$

a) $\dfrac{5x^3}{x - 2} \cdot \dfrac{2x}{x + 2} = \dfrac{10x^4}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{3x - 6}{x^2 - 4} - \dfrac{5x - 7}{x^2 + 2x} = \dfrac{3(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} - \dfrac{5x - 7}{x(x + 2)} = \dfrac{3x - 5x + 7}{x(x + 2)} = \dfrac{-2x + 7}{x(x + 2)}$

3.97 Observa el siguiente método que puedes emplear para multiplicar dos polinomios. Por ejemplo, para multiplicar $2x^2 - 3$ por $5x^2 - x + 4$:

a) Se colocan los coeficientes de ambos polinomios ordenados en una tabla, de esta forma.

2	**0**	**−3**	
			5
			−1
			4

b) En cada celda se multiplica el coeficiente de esa fila por el de esa columna.

2	**0**	**−3**	
10	0	−15	**5**
−2	0	3	**−1**
8	0	−12	**4**

c) Sumando cada diagonal, se obtienen los coeficientes del producto.

			2	**0**	**−3**	
			10	0	−15	**5**
			−2	0	3	**−1**
			8	0	−12	**4**
10	−2	−7	3	−12		

El resultado es $10x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x - 12$.

Comprueba que la operación es correcta y utiliza este método para realizar la multiplicación:

$$(2x^2 - 7x - 4) \cdot (3x^2 + x - 3)$$

$(2x^2 - 3) \cdot (5x^2 - x + 4) = 10x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 15x^2 + 3x - 12 = 10x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x - 12$. La operación es correcta.

Colocamos los coeficientes de los factores:

			2	−7	−4	
			6	−21	−12	3
			2	−7	−4	1
			−6	21	12	−3
6	−19	−25	17	12		

El resultado es $6x^4 - 19x^3 - 25x^2 + 17x + 12$.

3.98 Busca una fórmula que permita desarrollar $(a + b + c)^2$, y aplícala para calcular $(2x + x^2 + 3)^2$.

Se utiliza el desarrollo del cuadrado de una suma de dos sumandos, agrupando los dos primeros.

$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(2x + x^2 + 3)^2 = 4x^2 + x^4 + 9 + 2 \cdot 2x \cdot x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$

3.99 Halla un polinomio de segundo grado que se anule para $x = -2$ y dé resto 2 al dividirlo entre $(x - 2)$.

Si se anula para $x = -2$, es múltiplo de $x + 2$.

El resto al dividirlo entre $x - 2$ será 2, por lo que el valor del polinomio para $x = 2$ debe ser también 2.

Una solución podría ser la siguiente.

$\begin{cases} P(x) = (x + 2)(x + k) \\ P(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow (2 + 2)(2 + k) = 2 \Rightarrow k = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow P(x) = (x + 2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$, que cumple las condiciones pedidas.

3.100 Una raíz r es múltiple cuando el factor $(x - r)$ aparece elevado a una potencia mayor que 1 en la factorización del polinomio.

Por ejemplo en el polinomio $(x - 3)^2 \cdot (x - 1)$, $x = 3$ es una raíz doble.

Halla las raíces de estos polinomios teniendo en cuenta que en alguno de ellos puede haber raíces múltiples.

$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3$

$Q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

$R(x) = x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 12x$

$S(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 = x^3(x - 2)(x - 4)$. Raíces: 0 (triple), 2 y 4.

$Q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x + 2)(x - 3)(x - 1)^2$. Raíces: -2, 3, 1 (doble).

$R(x) = x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 12x = x(x - 1)(x - 3)(x + 2)^2$. Raíces: 0, 1, 3, -2 (doble).

$S(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x + 3)(x - 1)^3$. Raíces: -3, 1 (triple).

3.101 El largo de una caja mide 6 centímetros menos que el ancho, y la altura es 5 centímetros mayor que el largo. El volumen de la caja es 0,36 dm³. ¿Cuáles son sus medidas? ¿Cuántas soluciones posibles hay?

Llamando x al ancho de la caja, el largo mide $x - 6$ y el alto mide $x - 6 + 5 = x - 1$. El volumen de la caja en función del ancho será $V(x) = x(x - 6)(x - 1) = 360$.

Para resolver la ecuación, se factoriza el polinomio $x(x - 6)(x - 1) - 360 = x^3 - 7x^2 + 6x - 360 = (x - 10)(x^2 + 3x + 36)$.

La única solución posible es $x = 10$, el polinomio de segundo grado no tiene raíces reales.

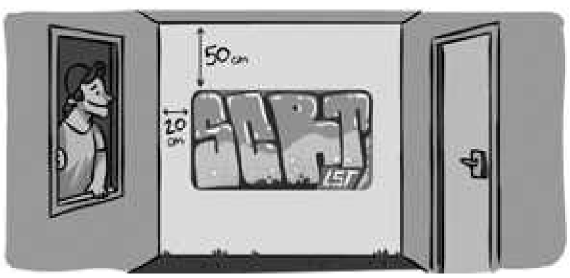
La caja mide 10 cm de ancho, 4 de largo y 9 de alto.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

3.102 Decorando la pared

Para decorar la pared del instituto, los alumnos deben realizar un *graffiti*, para lo que la dirección del centro les da ciertas instrucciones.

El dibujo debe ubicarse en una pared cuadrada que hay en un patio del instituto, centrado en ella y dejando unos márgenes inferior y superior de 50 centímetros y laterales de 20 centímetros.



a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de la zona pintada en función de la medida del lado de la pared.

b) Determina entre qué valores, en metros cuadrados, varía la mencionada área si la longitud del lado de la pared es mayor de 3 metros y menor de 4 metros.

a) $A = (x - 40) \cdot (x - 100) = x^2 - 140x + 4000$ cm²

b) $300 < x < 400 \Rightarrow 300^2 - 140\,300 + 4000 < A < 400^2 - 140\,400 + 4000 \Rightarrow 52\,000 < A < 108\,000$ en cm²

En m²: $5{,}2 < A < 10{,}8$

3.103 Buscando un polinomio

Juan, Alberto, Juanjo y Rocío proponen un juego a Diana: debe encontrar un polinomio de tercer grado con coeficientes enteros, y para ello, cada uno le dará una pista. Sin embargo, una de las pistas y solo una será falsa.

Pista de Juan: "El término independiente del polinomio es 5, y el polinomio es divisible por $x - 3$".

Pista de Alberto: "El coeficiente de mayor grado es 1 y si al polinomio se le suma una cantidad, el resultado es divisible por $x - 1$".

Pista de Juanjo: "No solo eso, si al polinomio se le suma esa misma cantidad, el resultado también es divisible por $x + 1$".

Pista de Rocío: "¡Qué curioso, si al polinomio se le suma también esa cantidad, el resultado también es divisible por $x + 2$!".

Diana responde que le falta una pista. "¡De acuerdo, te daré un dato más!", le indica Rocío, "el principio de la pista falsa es verdad".

Di cuál es la pista falsa y encuentra la expresión del polinomio. Comprueba que verifica las pistas verdaderas.

La pista de Juan es falsa ya que si el término independiente vale 5, el polinomio no puede ser divisible por $x - 3$ (3 no es divisor de 5).

Gracias a las otras tres pistas, se puede escribir $P(x) + k = (x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) = x^3 + 2x^2 - x - (k + 2)$.

Como el término independiente es 5, $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$.

La cantidad que se suma es $k = -7$ y efectivamente $x^3 + 2x^2 - x + 5 - 7 = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

AUTOEVALUACIÓN

3.A1 Reduce las siguientes expresiones.

a) $(7x^2 - 5x + 6) + (2x^2 + 8x - 9)$

b) $(7x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 8x - 9)$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 4) \cdot (2x^2 + 1)$

a) $(7x^2 - 5x + 6) + (2x^2 + 8x - 9) = 7x^2 - 5x + 6 + 2x^2 + 8x - 9 = 9x^2 + 3x - 3$

b) $(7x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 8x - 9) = 7x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 8x + 9 = 5x^2 - 13x + 15$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 4) \cdot (2x^2 + 1) = 6x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = 6x^5 - 10x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 6x - 4$

3.A2 Divide $(3x^3 - 2x^2 - 7) : (x^2 - x + 5)$.

Cociente: $3x + 1$

Resto: $-14x - 12$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -2x^2 & & -7 & x^2 \quad -x \quad +5 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +3x^2 & -15x & & 3x \quad +1 \\ \cline{1-3} 0 & +1x^2 & -15x & -7 & \\ & -1x^2 & +x & -5 & \\ \cline{2-4} & 0 & -14x & -12 & \end{array}$$

3.A3 Efectúa las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini.

a) $(3x^3 + 6x^2 - 2x - 6) : (x - 2)$

b) $(3x^3 + 6x^2 - 2x - 6) : (x + 2)$

a) Cociente: $3x^2 + 12x + 22$. Resto: 38

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 6 & -2 & -6 \\ 2 & & 6 & 24 & 44 \\ \hline & 3 & 12 & 22 & \boxed{38} \end{array}$$

b) Cociente: $3x^2 - 2$. Resto: -2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 6 & -2 & -6 \\ -2 & & -6 & 0 & 4 \\ \hline & 3 & 0 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$

3.A4 Sin hacer la división, indica su resto.

$(x^4 + x^2 - 7x - 9) : (x + 1)$

Por el teorema del resto, será $(-1)^4 + (-1)^2 - 7(-1) - 9 = 0$. La división es exacta.

3.A5 Desarrolla estas identidades notables.

a) $(10x + 1)^2$ **b)** $(5x^2 - 4y)^2$ **c)** $(3 + 2x)(3 - 2x)$

a) $(10x + 1)^2 = 100x^2 + 20x + 1$

b) $(5x^2 - 4y)^2 = 25x^4 - 40x^2y + 16y^2$

c) $(3 + 2x)(3 - 2x) = 9 - 4x^2$

3.A6 Factoriza estos polinomios e indica sus raíces.

a) $x^3 - 8x^2 + 16x$

b) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

a) $x(x - 4)^2$ Raíces: 0, 4 (doble)

b) $(x - 2)(x + 3)(x + 4)$ Raíces: 2, -3, -4

c) $(x - 3)(x^2 + 4)$ Raíz: 3

3.A7 Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$ **b)** $\dfrac{x^2 + x - 42}{x^2 - 7x + 6}$

a) $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9} = \dfrac{(2x + 3)(2x - 3)}{(2x - 3)^2} = \dfrac{2x + 3}{2x - 3}$ b) $\dfrac{x^2 + x - 42}{x^2 - 7x + 6} = \dfrac{(x + 7)(x - 6)}{(x - 1)(x - 6)} = \dfrac{x + 7}{x - 1}$

3.A8 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{3x}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{x + 1}$ **b)** $\dfrac{2x(x - 3)}{x^2 - 4} : \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + x - 6}$

a) $\dfrac{3x}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{x + 1} = \dfrac{3x}{(x + 1)(x - 1)} - \dfrac{5(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{3x - 5x + 5}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{-2x + 5}{(x + 1)(x - 1)}$

b) $\dfrac{2x(x - 3)}{x^2 - 4} : \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + x - 6} = \dfrac{2x(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} : \dfrac{x(x + 3)(x - 3)}{(x + 3)(x - 2)} = \dfrac{2x(x - 3)(x + 3)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)x(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{2}{x + 2}$

3.A9 Dado el polinomio $P(x) = x(x - 1)(x + 4)$, indica sus raíces y calcula el valor numérico para $x = 2$ y $x = -2$.

Las raíces son 0, 1 y -4.

$P(2) = 2(2 - 1)(2 + 4) = 12$ $P(-2) = -2(-2 - 1)(-2 + 4) = 12$

3.A10 Halla la expresión algebraica de la diagonal de un rectángulo cuyos lados difieren en 7 centímetros. ¿Es un polinomio?

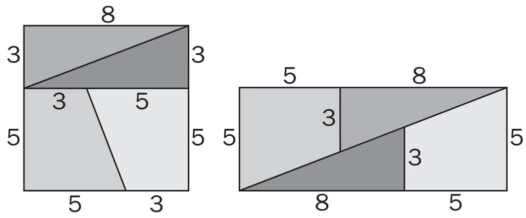
Calcula la diagonal si el lado menor mide 5 centímetros.

Si el lado menor mide x centímetros, el otro mide $x + 7$. Por el teorema de Pitágoras, la diagonal del rectángulo será $\sqrt{x^2 + (x + 7)^2}$. No es un polinomio, ya que aparece una raíz cuadrada.

Si el lado menor mide 5 cm, la diagonal mide $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm.

¡El área no se conserva!

Observa el cuadrado y el rectángulo.



Ambos están formados por las mismas piezas y sin embargo, el cuadrado tiene $8 \cdot 8 = 64$ unidades de superficie mientras que el rectángulo tiene $5 \cdot 13 = 65$ u^2.

Parece que por arte de magia se ha creado de la nada un área de 1 u^2. ¿Cómo es posible?

Construye materialmente este juego y trata de explicar qué ocurre.

Existen juegos matemáticos que solo pueden resolverse mediante una prueba u operando concretamente sobre ellos. Este es uno de ellos.

En realidad, también en este juego hay un truco: bastará con construir materialmente el juego para comprender que el asunto no cuadra.

El truco está en lo siguiente: los lados de los triángulos y de los dos trapecios no forman realmente una diagonal en el nuevo rectángulo; en otras palabras, la que figura como diagonal del rectángulo no es una recta sino una ilusión óptica creada por el gráfico. En realidad se forma una figura especial, similar a la final, pero en la que el área del paralelogramo interno es exactamente de un cuadradito.